

# Suites à deux dimensions et deux paramètres, études en sections de MANDELBROT

## Mathématiques expérimentales

Marc MICHAUT\*

\* IPEST de La Marsa, Tunisie

Mars 2008

### Résumé

Lorsqu'une catégorie d'objets mathématiques, bien que rigoureusement définis, devient par sa complexité très difficilement abordable par l'attaque démonstrative directe, il est pertinent dans l'attente de l'établissement de preuves définitives, de pratiquer une approche expérimentale, permise depuis quelques décennies par les ordinateurs. Il s'agit ici de tirer quelques enseignements préliminaires, assortis de conjectures encore floues car énoncées sans rigueur absolue, d'études de convergences de quelques suites bidimensionnelles. Le caractère tenace, apparemment universel de certains des comportements de ces suites permet de supposer qu'ils peuvent se généraliser à des suites de dimensionnalités plus grandes, c'est-à-dire finalement concerner une vaste catégorie de systèmes dynamiques de complexités diverses. La caractéristique principalement abordée dans l'article est la forêt fractale. Les formules mathématiques des suites considérées ne font intervenir que des fonctions très régulières, comme la plupart de celles utilisées en sciences physiques. Ainsi les conjectures présentées, si elles se confirment et si leur généralité se confirme, pourraient déboucher sur une meilleure compréhension des systèmes dynamiques.

Mots-clés : *attracteur ; bifurcation ; carte ; cascade ; convergence ; diable ; escalier ; étrange ; fractal ; section, suites ; transition ; zonage*

Principaux noms d'auteurs cités : *Cantor ; Feigenbaum ; Hénon ; Landau ; Mandelbrot ; Poincaré ; Verhulst*

### Introduction

La démarche de cet article est essentiellement expérimentale. Etant donné la très grande complexité et la profondeur logique infinie des objets étudiés, les conjectures proposées ne seront ni démontrées, ni même pour certaines d'entre elles, rigoureusement énoncées. La pratique expérimentale vise à guider l'énonciation des conjectures, à la fois dans leur vocabulaire et leur syntaxe, et dans le sens où elles semblent plausibles. Le travail mathématique proprement dit ne commencera que plus tard, avec d'éventuelles tentatives de démonstrations.

## 1 Quelques définitions

Les suites étudiées sont des suites de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  notés  $(x_n, y_n)$ , de premier terme, ou graine  $(x_0, y_0)$ , déterminées par des formules d'itération à un seul étage, faisant intervenir deux paramètres notés  $a$  et  $b$ . Le numéro d'ordre  $n$  quant à lui n'apparaît jamais explicitement dans

les formules. La suite classique de HÉNON répond aux formules d'itération :

$$H \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - a \cdot x_n^2 \\ y_{n+1} &= b \cdot x_n \end{aligned}$$

La suite de MANDELBROT et JULIA quant à elle est déterminée par l'unique formule

$$M^* \quad s_{n+1} = s_n^2 + c$$

où  $s_n = x_n + iy_n$  et  $c = a + ib$ . La récurrence peut bien sûr être mise sous une forme analogue aux formules de HÉNON, soit :

$$M \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} &= 2x_n \cdot y_n + b \end{aligned}$$

Nous appellerons *suites holonomes* les suites du type MANDELBROT et JULIA, où  $s_{n+1}$  est une fonction polynomiale, ou plus généralement une fonction partout développable en série entière, de  $s_n$ , et de  $c = a + ib$ . Dans tous les cas contraires, la suite sera dite *anholome*. C'est le cas de la suite de HÉNON par exemple. Les suites présentent asymptotiquement les comportements suivants :

- $C_1$  convergence vers un ensemble de points en nombre fini ;
- $C_{21}$  convergence vers un ensemble infini de points répartis sur une courbe de longueur finie (pas nécessairement connexe) ;
- $C_{22}$  convergence vers un ensemble infini de points, de dimension strictement supérieure à 1, répartis dans un domaine borné ;
- $D$  divergence (l'ensemble asymptotique n'est pas borné ou n'existe pas).

Lorsque le comportement est, soit  $C_{21}$ , soit  $C_{22}$ , il sera noté de façon indifférenciée,  $C_2$ . De même,  $C$  représentera, soit  $C_1$ , soit  $C_2$ . Les types d'ensembles asymptotiques de  $C_1$ ,  $C_{21}$  et  $C_{22}$  seront respectivement notés  $A_1$ ,  $A_{21}$  et  $A_{22}$ . Dans la terminologie des attracteurs,  $A_1$  et  $A_{21}$  sont des sections de POINCARÉ d'attracteurs non étranges, tandis que  $A_{22}$  est une section d'un attracteur étrange. Les problèmes de l'existence, de la forme et de la recherche de systèmes différentiels qui convergent vers des attracteurs dont les ensembles asymptotiques des suites étudiées constituent les sections de POINCARÉ ne font pas l'objet du présent article. Le comportement d'une suite dépend de 4 paramètres au total :  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $a$  et  $b$ . Une étude complète consiste en un zonage (ou cartographie) d'un espace  $\mathbb{R}^4$  dont les points ont pour coordonnées  $(x_0, y_0, a, b)$ . Cet espace de toutes les suites correspondant à un couple de formules données sera noté  $\mathcal{S}$ . Le zonage expérimental étudié consiste à différencier les domaines correspondant à  $C_1$ ,  $C_2$  et  $D$ , et au sein de  $C_1$ , les domaines correspondant à des ensembles asymptotiques de 1, 2, ...,  $n$ , ... points, domaines que nous noterons sans plus de précision  $\mathcal{C}_{1(n)}$ . Nous noterons de même  $\mathcal{C}_2$  le domaine, indifférencié dans la méthode utilisée, qui manifeste le comportement  $C_2$ , et  $\mathcal{D}$  le domaine présentant la divergence  $D$ . La notation  $\mathcal{C}_1$  désignera l'ensemble  $\bigcup_n \mathcal{C}_{1(n)}$  et  $\mathcal{C}$  représentera  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Les intersections de tous ces domaines avec les plans d'études répondront, pour simplifier, aux mêmes notations. La cartographie dans une section à 2 dimensions peut se faire de différentes façons :

1. à  $a$  et  $b$  constants, dans un plan des graines  $(x_0, y_0)$  : *zonage de JULIA*.
2. à  $x_0$  et  $y_0$  constants, dans un plan des paramètres  $(a, b)$  : *zonage de MANDELBROT*.
3. à  $a$  et  $x_0$  constants, ou autre combinaison analogue : *zonage mixte*.

Par exemple, la suite de MANDELBROT et JULIA donne lieu, en zonage de JULIA, à l'apparition des ensembles de JULIA proprement dits; en zonage de MANDELBROT pour la graine  $x_0 = 0$  et  $y_0 = 0$ , à celle de l'ensemble de MANDELBROT proprement dit. Cet article ne traite que de sections de MANDELBROT; les plans des paramètres  $(a, b)$  seront toujours munis d'une métrique euclidienne ordinaire.

Outre les suites classiques de HÉNON et de MANDELBROT et JULIA, seront considérées dans cet article les suites originales suivantes  $S_1, S_2, S_3$ , holonome pour la première, anholonome pour les deux autres :

$$\begin{aligned}
 S_1^* & \quad s_{n+1} = \exp s_n + s_n^2 + c \quad \text{ou} \\
 S_1 & \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \exp x_n \cdot \cos y_n + x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} &= \exp x_n \cdot \sin y_n + 2x_n \cdot y_n + b \end{aligned} \\
 S_2 & \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \exp x_n \cdot \sin y_n + x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} &= \exp x_n \cdot \sin y_n + 2x_n \cdot y_n + b \end{aligned} \\
 S_3 & \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^3 - 3x_n \cdot y_n^2 + y_n + a \\ y_{n+1} &= 3x_n^2 \cdot y_n - y_n^3 + x_n + b \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Enfin, nous utiliserons à fins d'illustrations ponctuelles, deux suites à un seul paramètre  $a$  : suite  $S_{2a}$ , à deux dimensions et anholonome, et la très classique suite de VERHULST notée  $V$ , unidimensionnelle à un paramètre :

$$\begin{aligned}
 S_{2a} & \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \cos(x_n + a \cdot y_n) \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \\
 V & \quad x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)
 \end{aligned}$$

## 2 Premières conjectures

Nous proposons les conjectures ci-dessous; elles sont supportées par les résultats expérimentaux qui suivront.

1. Lorsque la suite est holonome et polynomiale de degré fini, alors seuls les comportements  $C_1$  et  $D$  peuvent exister de façon non négligeable.
2. Lorsque la suite est anholonome, le comportement  $C_2$  existe dès lors que  $C_1$  et  $D$  existent.
3. Lorsque la suite est anholonome et que  $C_{1(1)}$  et  $C_2$  existent, alors la transition entre le domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$  et le domaine  $\mathcal{C}_2$  peut avoir lieu de deux manières, exclusives l'une de l'autre mais pouvant se présenter en des endroits distincts du plan  $(a, b)$  pour une même suite : soit le domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$  se termine par une suite infinie de bandes  $\mathcal{C}_{1(n)}$  déduites les unes des autres par bifurcations de FEIGENBAUM, avec pour valeurs successives de  $n$  :  $n = 2^q$  où  $q = 1, 2, 3, \dots$ , la somme des largeurs des bandes restant finie, chaque bande  $\mathcal{C}_{1(n)}$  possédant une frontière fermée de longueur finie, différentiable presque partout, du côté du domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$ , c'est-à-dire avec la bande  $\mathcal{C}_{1(n/2)}$ ; soit le domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$  est bordé par une forêt fractale notée  $F_1$  dont l'étude expérimentale constitue l'objet principal de cet article. Plus généralement, une éventuelle transition de  $\mathcal{C}_{1(p)}$  vers  $\mathcal{C}_2$  a lieu, soit par

cascade de FEIGENBAUM avec  $n = p \cdot 2^q$  ou bien par une forêt fractale notée  $F_p$  dont la relation avec les forêts de type  $F_1$  sera précisé plus loin.

4. Dans les deux cas précédents, le domaine  $\mathcal{C}_2$  comporte des îlots  $\mathcal{C}_{1(n)}$  fractals en nombre infini,  $n$  n'étant pas borné pour l'ensemble de ces îlots. Nous nommerons *poulpes*, en raison de leurs formes, les domaines connexes formés par la réunions d'îlots  $\mathcal{C}_{1(n)}$  centrés sur un nombre  $p$ , tels que  $n = 2^q \cdot p$  où  $q$  parcourt la totalité de l'ensemble  $\mathbb{N}$ . Un poulpe centré sur  $p$  sera noté  $\mathcal{P}_p$ . L'étude expérimentale des poulpes ne sera pas abordée dans le présent article.

### 3 Examen global des sections de Mandelbrot

Les couleurs, qui seront les mêmes dans toutes les figures, se répètent modulo 16. Ainsi, les domaines  $\mathcal{C}_{1(1)}$  et  $\mathcal{C}_{1(17)}$  sont figurés en bleu ; les domaines  $\mathcal{C}_{1(2)}$  et  $\mathcal{C}_{1(18)}$  en vert, etc. Le domaine  $\mathcal{C}_2$  non différencié en  $\mathcal{C}_{21}$  et  $\mathcal{C}_{22}$  est toujours en noir ; le domaine de divergence  $\mathcal{D}$  est représenté en blanc. Ci-après en figure 1 le code complet des couleurs employées.



















	1 17		5 21		9 25		13 29		domaine $\mathcal{C}_2$
	2 18		6 22		10 26		14 30		divergence
	3 19		7 23		11 27		15 31		
	4 20		8 24		12 28		16 32		

FIG. 1 – Code des couleurs

#### 3.1 Ensemble de Benoît Mandelbrot et ordres fractals sur les polygones

Les couleurs de la figure 2 représentent les nombres  $n$  des ensembles  $\mathcal{C}_{1(n)}$ , chacun d'entre eux étant formé d'une réunion infinie de domaines disjoints. Chaque domaine, de forme approximativement circulaire (sauf le plus grand  $\mathcal{C}_{1(1)}$ ) est limité par une frontière partout différentiable.

La partie centrale de l'ensemble est un domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$  sur lequel est fixée une forêt fractale primaire  $F_1$  de domaines arrondis  $\mathcal{C}_{1(n)}$  plus petits, avec  $n > 1$ . Sur chaque arbre de la forêt primaire (respectivement  $k$ -aire) appartenant à  $\mathcal{C}_{1(n)}$  se trouve une forêt secondaire (respectivement  $(k+1)$ -aire) notée  $F_n$ . Le point de contact unique entre une partie du domaine  $\mathcal{C}_{1(n)}$  et un arbre de sa forêt  $F_n$  appartient toujours au domaine  $\mathcal{C}_{1(n)}$  et non pas à l'arbre qui en est issu. Ainsi chaque arbre est-il délimité par une frontière différentiable fermée, sauf au point de contact avec son domaine-parent. La frontière du domaine et celle de l'arbre admettent, au point de contact, une tangente commune. La largeur  $\lambda$  d'un arbre, mesurée parallèlement à cette tangente au voisinage de son domaine-parent, vérifie au premier ordre :  $\lambda = k \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  où  $k$  est une constante, et  $\varepsilon$  la distance à la frontière du domaine.

D'autre part, il existe, issus de chaque suite infinie connexe d'arbres appartenant à des forêts  $F_n$ , avec  $n$  croissant, des filaments connexes formés de successions de miniatures de l'ensemble de MANDELBROT. Nous appellerons poulpe d'ordre  $n$  et noterons  $\mathcal{P}_n$  l'une de ces miniatures, dont le corps central appartient au domaine  $\mathcal{C}_{1(n)}$ . La figure 3 montre un poulpe d'ordre 4, linéairement environ 100 fois plus petit que l'ensemble entier. Toutes les annexes (forêts, poulpes) d'un poulpe d'ordre  $n$  sont d'ordres égaux simplement au produit de leurs homologues de l'ensemble central, par  $n$ . Ce dernier constitue d'ailleurs l'unique poulpe  $\mathcal{P}_1$ .

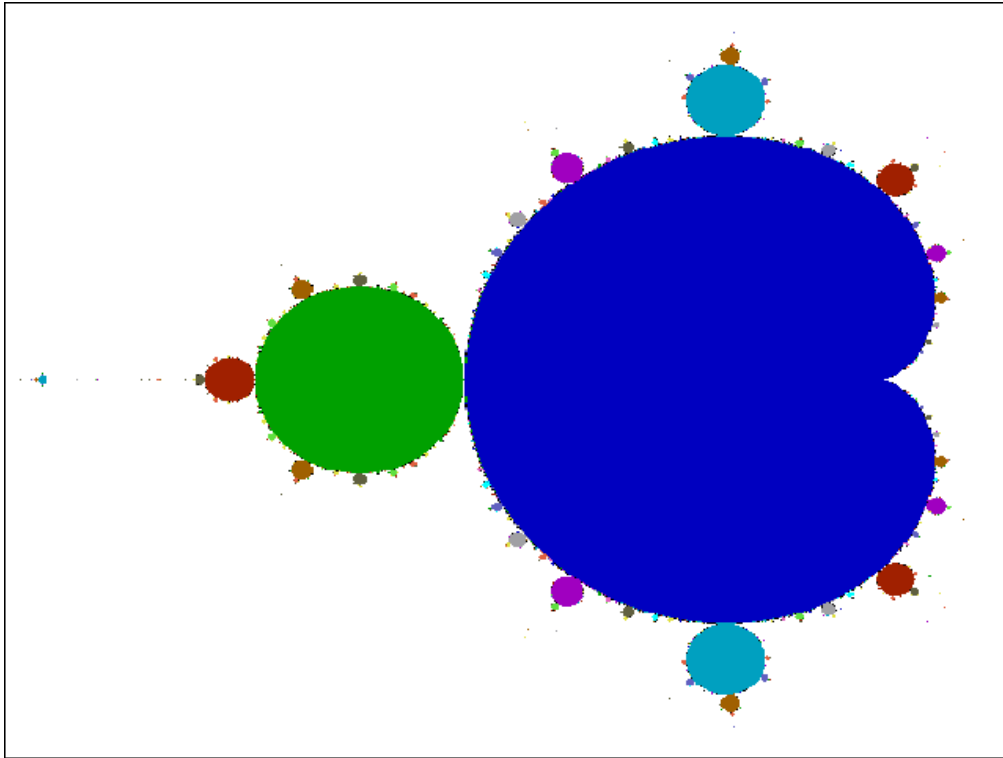


FIG. 2 – Ensemble de MANDELBROT

Intéressons-nous aux ordres  $n$  des arbres présents sur la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ . Il est loisible de constater expérimentalement que ces nombres s'obtiennent par le processus itératif suivant : On commence par les deux nombres extrêmes, 1 et 2, classés dans cet ordre (étape 0). On effectue leur somme, soit 3, et on la place entre 1 et 2 ; on affectue ensuite les sommes  $1 + 3$  et  $3 + 2$ , et ainsi de suite une infinité de fois. Le nombre total de nombres différents de 1, classés à l'étape  $p$  est égal à  $2^p$ . Le tableau 1 illustre les étapes 0 à 4 de ce processus.

On vérifie que chaque entier  $n$  apparaît un nombre fini de fois, égal au nombre  $\Pi(n)$  de polygones réguliers à  $n$  côtés. D'autre part, dans l'ordre que nous appellerons *dual*, chaque entier  $n = m_1 + m_2$  apparu à l'étape  $p$  comme somme de deux nombres  $m_1$  et  $m_2$  successifs premiers entre eux, eux-mêmes apparus à l'étape  $(p-1)$ , correspond au polygone à  $n$  sommets, croisé  $\inf(m_1, m_2)$  fois. Enfin, dans l'ordre *direct*, ce même nombre correspond encore à un polygone à  $n$  sommets, dual du précédent, mais les polygones sont maintenant classés par ordre d'angle au sommet croissant. Le nombre de croisement de chaque polygone de l'ordre direct s'obtient par un processus itératif identique à celui qui vient d'être décrit, mais en partant des nombres 0 et 1 respectivement au lieu de 1 et 2. La figure 4 illustre l'ordre direct jusqu'à l'étape 4. Le symbole  $n : m$  indique un polygone à  $n$  sommets, croisé  $m$  ( $m < \frac{n}{2}$ ) fois. Les deux polygones générateurs de l'ordre entier sont  $1 : 0$  (non représenté sur la figure 4) et  $2 : 1$ . Certains polygones sont auto-duaux. Les deux ordres sur les polygones réguliers, direct et dual, sont fractals dans le sens où aucun polygone ne possède ni prédécesseur, ni successeur. Nous les noterons respectivement  $\Omega_1$  et  $\Omega_1^*$ .

L'ordre direct coïncide avec les ensembles asymptotiques de points atteints pour les arbres successifs de la forêt fractale  $F_1$ , chacun de ces ensembles étant homéomorphe à un polygone régulier pour ce qui est de l'ordre de parcours de ses points lors de l'exécution de la suite. Autrement dit, il est possible de munir la frontière du domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$  d'une abscisse curviligne régulière que nous noterons  $\alpha$ , égale à l'angle au sommet du polygone obtenu à l'extérieur du

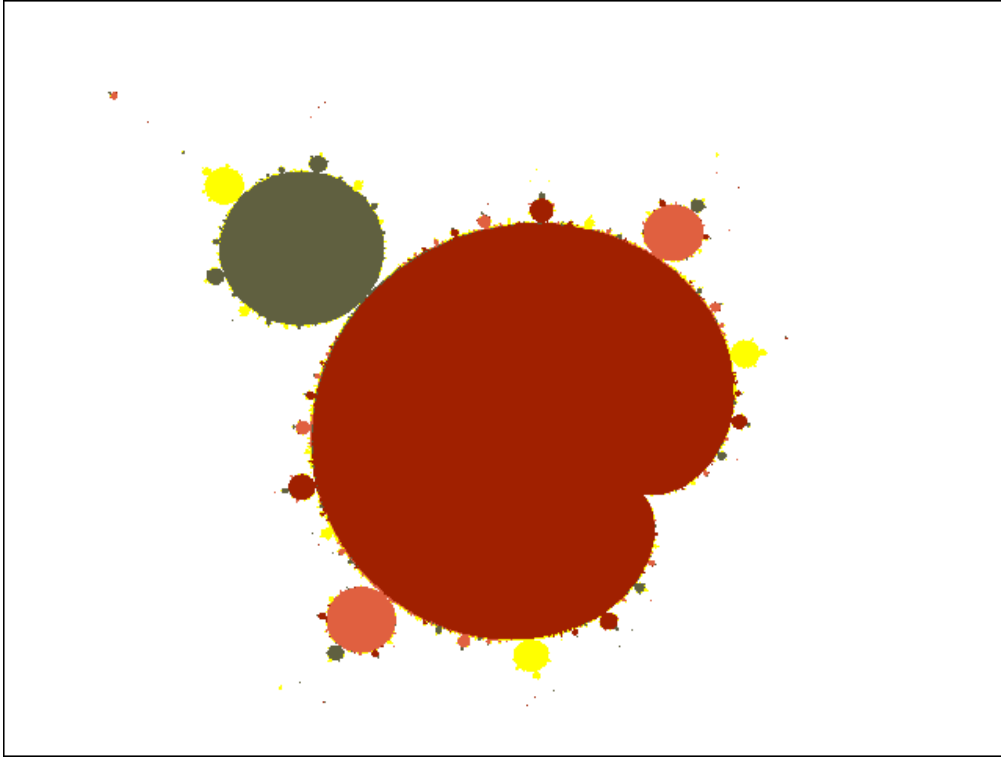


FIG. 3 – Ensemble de MANDELBROT : réplique miniature d'ordre 4

domaine, à la limite du point considéré. Cet angle sera exprimé en demi-tour (une unité est égale à  $\pi$  radian). Les points d'abscisse  $\alpha$  rationnelle sont chacun racine d'un arbre de la forêt  $F_1$ . Les points d'abscisse  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  ne sont pas racine d'un arbre. Le long de la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ , la valeur de  $\alpha$  varie depuis 0 pour le pôle gauche (voir la figure 2) jusqu'à 1 pour l'ombilic droit, point où  $\mathcal{C}_{1(1)}$  apparaît d'ailleurs comme un arbre posé sur sa propre frontière. Les forêts  $F_n$  répondent quant à elles d'ordres sur des ensembles de polygones  $p$ -composés, où  $(p - 1)$  désigne le niveau (primaire, secondaire, etc.) de l'arbre sur lequel pousse la forêt considérée. Nous reviendrons ultérieurement sur ces polygones composés. Chacun peut être considéré comme un produit non commutatif de  $p$  polygones réguliers. En parcourant successivement des arbres  $F_q$ ,  $q$  croissant, chacun multiplie le  $(q - 1)$ -polygone de l'arbre précédent par son propre polygone; le  $p$ -polygone obtenu est noté  $n_1 : m_1 \times n_2 : m_2 \times \dots \times n_p : m_p$ . Un point  $(a, b)$  appartient à la frontière de l'ensemble de MANDELBROT, soit s'il lui correspond une abscisse  $\alpha$  irrationnelle ou rationnelle sur la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  ou d'un arbre, soit s'il répond d'un  $\omega$ -polygone. L'ensemble des points de ce dernier type, correspondant à un parcours de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  vers  $\mathcal{D}$  que nous appellerons une cascade de LANDAU<sup>1</sup>, est négligeable dans l'ensemble des points de la frontière.

### 3.2 Section des suites $S_1$

Pour ces suites encore holonomes, l'essentiel reste l'absence d'un domaine  $\mathcal{C}_2$  d'aire non nulle (figure 6); la transition depuis  $\mathcal{C}_1$  vers la divergence se fait soit directement, soit encore

1. La théorie originale de Lev LANDAU de la transition vers la turbulence, en mécanique des fluides notamment, faisait intervenir quant à elle la superposition de mouvements de périodes incommensurables entre elles (scénario de LANDAU-HOPF). Tout comme la cascade envisagée ici, ce processus est négligeable quant à sa probabilité d'occurrence. Le scénario de LANDAU-HOPF fut longtemps accepté, avant d'être falsifié au cours de la décennie 1960.

étape	nombres de sommets																
0	1											2					
1	1	3										2					
2	1	4	3						5	2							
3	1	5	4	7	3	8	5	7	2								
4	1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2

TAB. 1 – Ordres sur les polygones : nombres de sommets

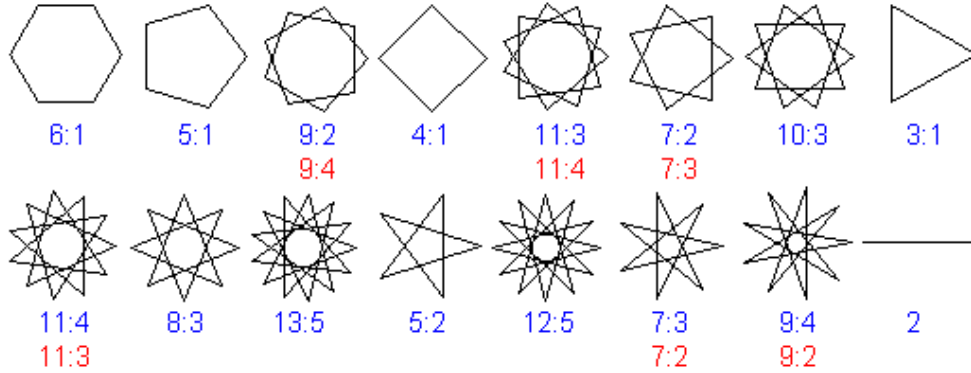


FIG. 4 – Ordres sur les polygones, étape n°4 : ordre direct (figures et symboles en bleu) et ordre dual (symboles en rouge) ; pas de symbole rouge pour les polygones auto-duaux.

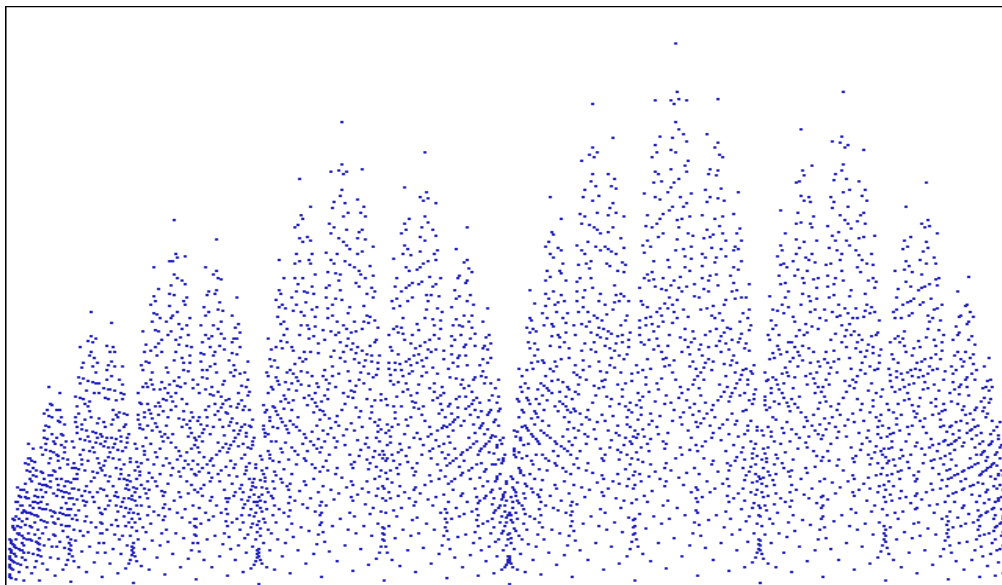


FIG. 5 – Ordre sur les polygones : nombres de sommets en ordonnées, obtenus à la 12<sup>e</sup> étape ; maximum  $n = 610$  (nombre de la suite standard de FIBONACCI).

à travers un seul point de  $\mathcal{C}_2$ , cette dernière possibilité étant négligeable comme dans le cas de l'analyse précédente. Notons que la succession des arbres de la forêt, par exemple  $F_1$ , reste la même que dans l'ensemble de MANDELBROT : l'existence de l'abscisse  $\alpha$  est une propriété universelle. Une complication supplémentaire apparaît ici par rapport à l'ensemble de MANDELBROT, à savoir que la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  ou d'un arbre possède en général une portion fractale, c'est-à-dire de dimension strictement supérieure à 1. Les poulpes existent encore dans le cas de la suite  $S_1$ .

### 3.3 Section des suites de Hénon

Une rupture apparaît lorsqu'on quitte l'univers des suites holonomes. Les zones noires de la figure 7 correspondent à un domaine  $\mathcal{C}_2$  d'aire non nulle maintenant. La transition vers la divergence se fait d'une manière non obligatoire, mais non négligeable, sur le mode  $\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{D}$  en simplifiant au maximum. En réalité, une infinité de retours dans  $\mathcal{C}_1$  sont obligatoires avant de quitter  $\mathcal{C}_2$  pour  $\mathcal{D}$  si l'on doit passer par  $\mathcal{C}_2$ . Quatre gros poulpes  $\mathcal{P}_3$ ,  $\mathcal{P}_5$ ,  $\mathcal{P}_7$  et  $\mathcal{P}_8$ , en-dehors du poulpe trivial  $\mathcal{P}_1$ , sont visibles sur la figure à grande échelle. Il existe en fait une infinité de poulpes qui zèbrent tout le domaine  $\mathcal{C}_2$ . Par contre, rien de ce qui pourrait ressembler à une forêt fractale n'apparaît sur la section de MANDELBROT de cette suite, sauf comme artefact marginal dû au fait que la profondeur de calcul n'est pas infinie. Sur la figure 7, l'artefact se présente comme un mince liseré noir contenant de faux arbres, sur la partie presque rectiligne de la frontière en bas à gauche. On remarquera encore la forme complexe, fractale, de la frontière du domaine  $\mathcal{C}$ . Ce dernier semble être connexe mais n'est peut-être pas localement connexe. Du côté de  $\mathcal{C}_2$ , le domaine  $\mathcal{C}_{1(1)}$  est bordé d'une cascade de bifurcations de FEIGENBAUM  $\mathcal{C}_{1(2)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(4)}$ , etc. dont les frontières successives sont des courbes différentiables. Le plus gros poulpe  $\mathcal{P}_3$  au centre gauche est de même bordé du côté de  $\mathcal{C}_2$  par des domaines  $\mathcal{C}_{1(6)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(12)}$ , etc. à frontières différentiables formant une cascade de FEIGENBAUM. Si l'on regarde à plus petite échelle, on constate qu'il en est de même, systématiquement, pour tous les poulpes : une partie non négligeable de leur frontière avec  $\mathcal{C}_2$  est occupée par une cascade de bifurcations à frontières différentiables. Notons encore que, d'une manière très générale, toutes les frontières sont fermées vers l'extérieur, c'est-à-dire que la courbe-frontière correspond au plus petit des deux nombres de points de l'ensemble limite de convergence, l'un de ces deux nombres pouvant d'ailleurs être infini.

### 3.4 Section des suites $S_2$

L'évolution des suites anholonomes  $S_2$  (figure 8) ne ressemble en rien à celle des suites holonomes  $S_1$  (figure 6) malgré la ressemblance des formules. Comme dans le cas des suites de HÉNON, il existe un domaine  $\mathcal{C}_2$  d'aire non nulle, fractionné en une infinité de sous-domaines. Les poulpes existent toujours, ainsi maintenant qu'une forêt fractale non artefactuelle. La figure 9 montre à une plus grande échelle la forêt qui apparaît en bas de la figure 8. Cette image appelle de nombreux commentaires. On remarquera d'abord la présence de poulpes dans la portion de  $\mathcal{C}_2$  située en bas, au-dessous des arbres de formes étirées. Ensuite, la succession des nombres  $n$  de sommets des polygones attachés à chaque arbre est exactement la même que pour l'ensemble de MANDELBROT : même ordre  $\Omega$  sur les polygones. Les arbres, au lieu d'être de formes quasi-circulaires (cas MANDELBROT) sont maintenant très allongés. Plus précisément, leur largeur  $\lambda$  croît avec la distance  $\delta$  à la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  comme une puissance  $g$  de  $\delta$  strictement supérieure à 1 :

$$\lambda = \psi(n) \cdot \delta^g \tag{1}$$

alors qu'on avait, pour l'ensemble de MANDELBROT :

$$\lambda = \phi(n) \cdot \delta^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Ces lois 1 et 2 ne sont valables qu'à la limite  $\delta \rightarrow 0^+$ . Les deux fonctions  $\psi(n)$  et  $\phi(n)$  sont décroissantes avec  $n$ , vraisemblablement selon une loi de puissance négative, au moins approchée, pour la fonction  $\psi$ . Il faut remarquer, sur les figures 8 et 9, les bases élargies, en forme de souches, des arbres au voisinage de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  qui semblent contredire l'équation 1. Ces souches sont en fait des artefacts inévitables, qui ne disparaîtraient que pour une profondeur

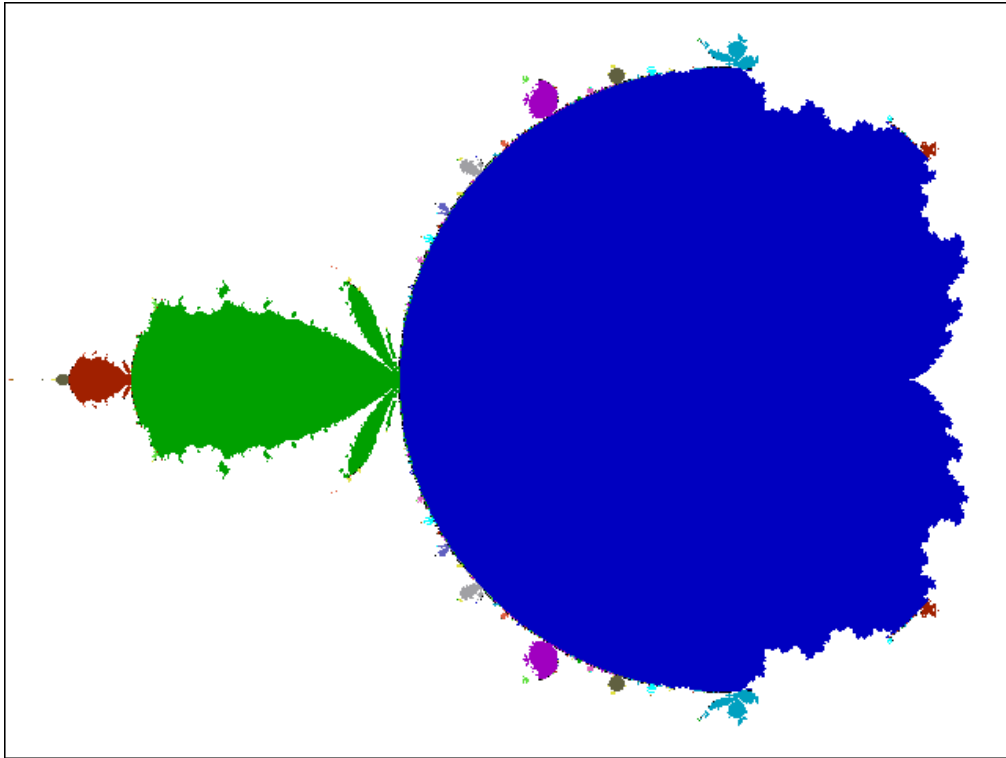


FIG. 6 – Formules  $S_1$

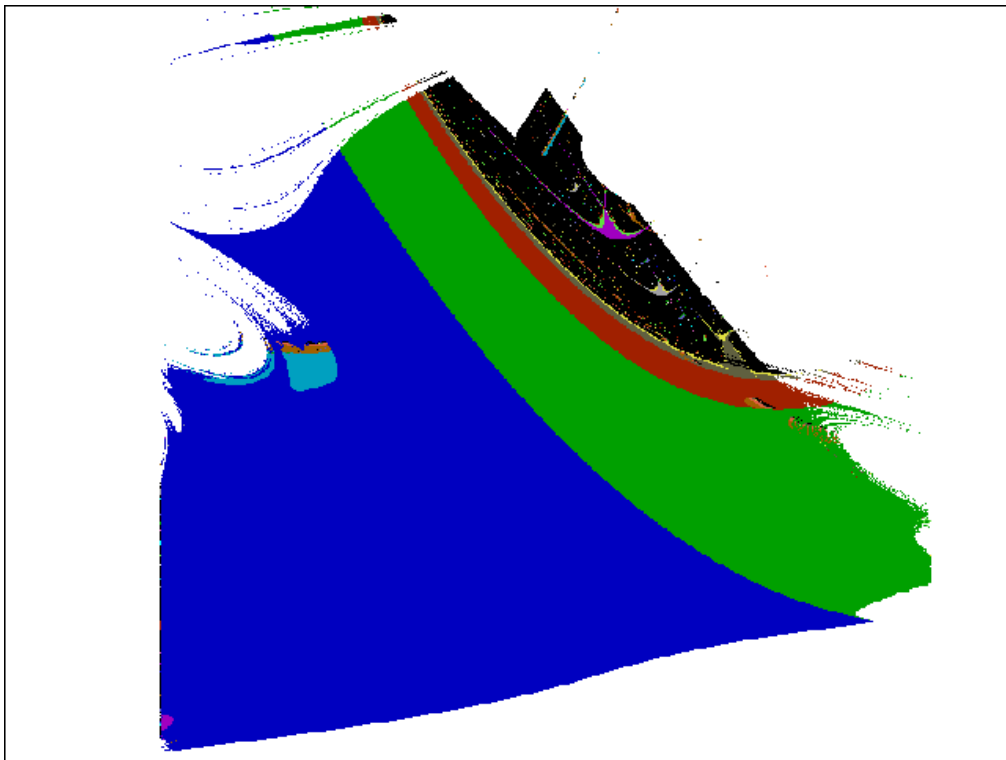


FIG. 7 – Formules de HÉNON

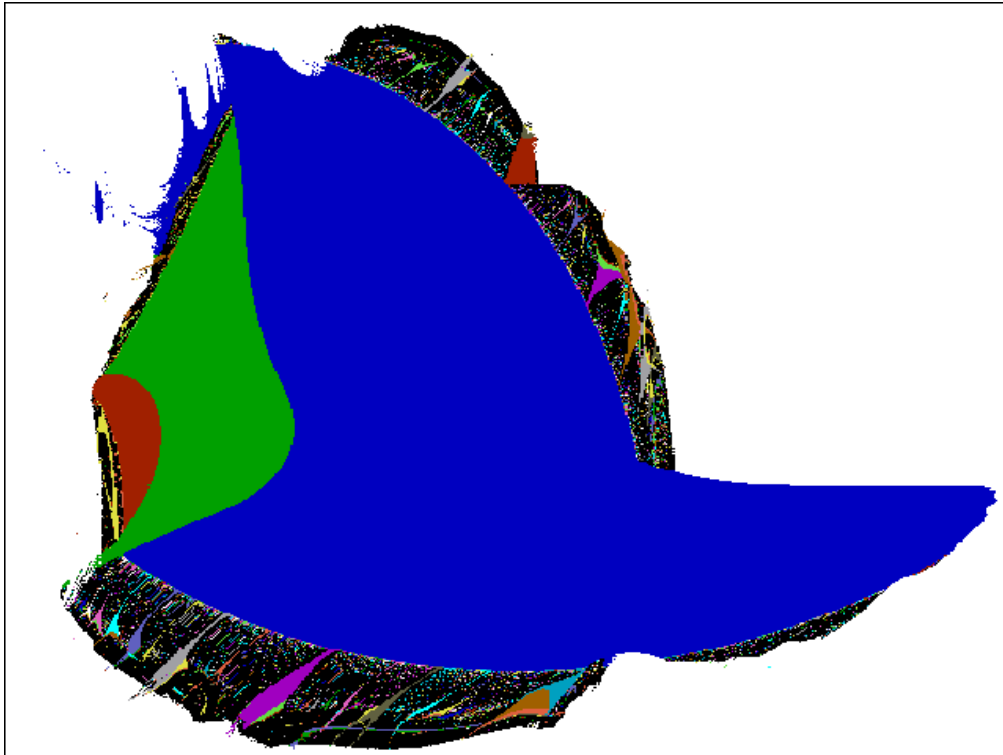


FIG. 8 – Formules  $S_2$  : vue d'ensemble, plan  $(a, b)$

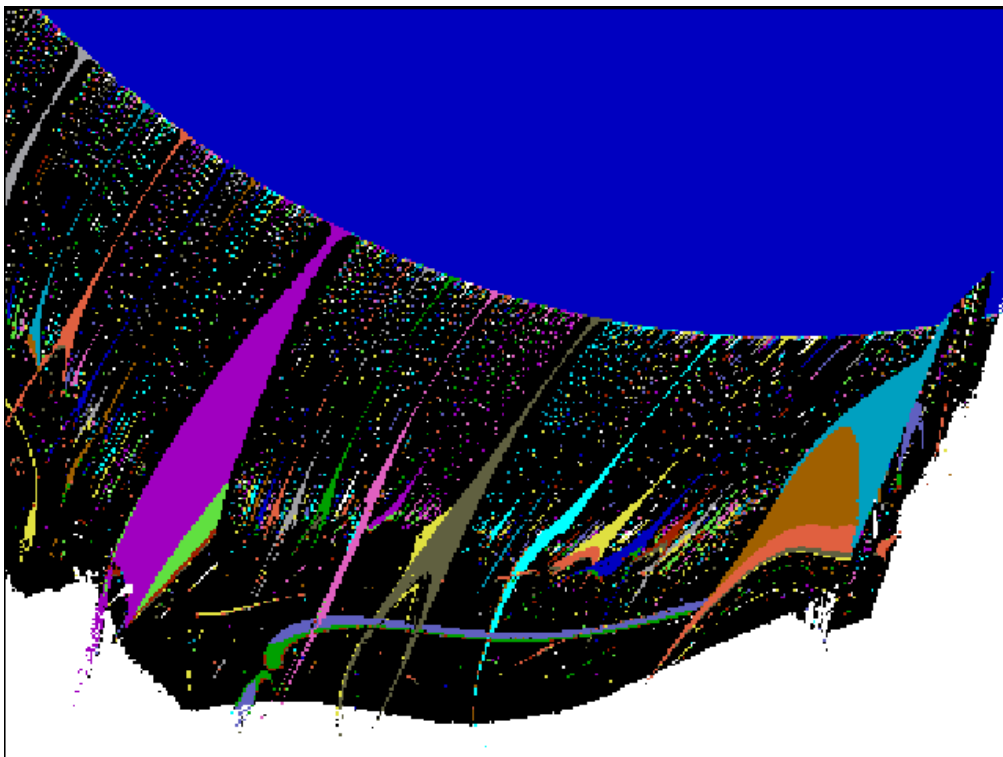


FIG. 9 – Formules  $S_2$  : forêt fractale primaire

de calcul infinie (un nombre de tours d'itération infini). Il est seulement possible de les réduire, à condition de consentir un sacrifice important en terme de temps de calcul. De telles souches artefactuelles non totalement réductibles apparaissent également sur les figures 11, 12 et 13 relatives aux formules  $S_3$ .

La figure 10 montre une modélisation de la forêt fractale, poussée jusqu'à  $n = 13$  (29 arbres au total), effectuée selon le principe de l'ensemble triadique de CANTOR, avec une proportion  $\beta$  d'espace occupé à chaque étape comprise entre 0 et 1, limites exclues ( $\beta = \frac{1}{3}$  pour l'ensemble original de CANTOR). Est placé tout d'abord l'arbre  $n = 2$  puis, dans l'espace restant, l'arbre  $n = 3$  puis, dans les espaces restants, les arbres  $n : m = 5 : 2$  et  $n = 4$ , etc. La frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  est représentée rectilignement, en haut de la figure, munie d'une abscisse qui est linéaire en  $\alpha$ . L'axe  $\delta$  est vertical, orienté vers le bas. La largeur  $\lambda$  de chaque arbre varie en  $\delta^2$  à la limite  $\delta \rightarrow 0$  et cette largeur est aussi proportionnelle à  $n^{-2}$  toujours à la limite  $\delta \rightarrow 0$ . La plage des valeurs de  $\alpha$  représentées sur la modélisation est plus large que celle de la figure 9 : 0 à 0.85 pour la première ; 0.1 à 0.35 environ pour la seconde. Les pieds des arbres du modèle sont orthogonaux à la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ , ce qui n'est pas le cas des arbres originaux des suites étudiées.

Il peut paraître étrange d'employer en mathématiques ce procédé, habituellement réservé aux sciences naturelles. A partir du moment où l'objet mathématique étudié est trop complexe pour pouvoir être appréhendé directement dans son ensemble, nous pensons que cette approche est indispensable, tout comme il est nécessaire de modéliser un système physique complexe pour en distinguer les éléments saillants. Autrement dit, la démarche expérimentale, couplée à la modélisation, semble s'imposer pour l'étude des faits mathématiques complexes. La nature est, dans l'état actuel des théories physiques, toujours modélisée, c'est-à-dire représentée imparfaitement par des formes mathématiques. Une forme mathématique complexe peut, à son tour, être modélisée par un autre objet mathématique, imparfait relativement à elle-même.

### 3.5 Section des suites $S_3$

On observe sur la figure 11 les mêmes ensembles que sur la figure 8, en particulier l'ensemble  $\mathcal{C}_2$  traversé par les poulpes et les forêts fractales, ceci malgré la grande dissemblance entre les formules  $S_2$  et  $S_3$ . Une dizaine d'autres essais, non figurés dans cet article, avec des suites anholonomes variées à formules polynomiales, ou faisant intervenir des fonctions exponentielles ou sinusoidales ou des combinaisons de ces types de fonctions, fournissent le même type de portrait dans le plan  $(a, b)$ . Dans le cas de fonctions bornées, le domaine  $\mathcal{D}$  n'existe pas et c'est  $\mathcal{C}_2$  qui s'étend au voisinage de l'infini. Ces observations plaident en faveur de l'universalité des structures que sont les poulpes, obligatoires, et les forêts fractales, quant à elles seulement facultatives, puisque apparemment absentes dans le cas des suites de HÉNON.

Sur la figure 12, un agrandissement de la partie inférieure de la figure 11. Il existe une forêt  $F_1$  poussant sur la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ , et une autre forêt, de classe  $F_2$ , issue de la frontière de la partie principale de  $\mathcal{C}_{1(2)}$ . Cette seconde forêt, plus petite, apparaît en bas. Lui correspondent des ensembles-limites qui sont des 2-polygones de type  $2 \times n : m$ , dont les nombres totaux de sommets,  $2n$ , sont tous pairs (d'où un ensemble restreint de couleurs sur la figure). L'abscisse  $\alpha$  sur la frontière est l'angle du polygone  $n : m$ .

La figure 13 est un agrandissement de la partie centrale de la figure 12, plus précisément de la partie sommitale, ou frondaison, d'un arbre  $7 : 2$ . On peut faire un certain nombre de constatations intéressantes :

1. Les arbres de la forêt primaire  $F_1$ , qui apparaissent à l'extrême-gauche, ont des hauteurs comparables, qui de toute manière ne tendent pas vers zéro au voisinage de l'arbre  $7 : 2$ .

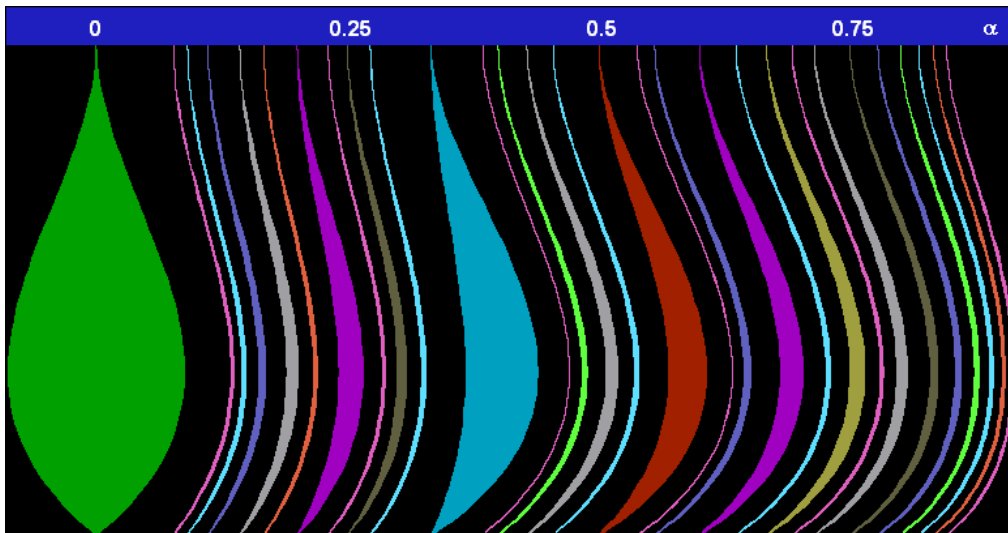


FIG. 10 – Forêt fractale modélisée

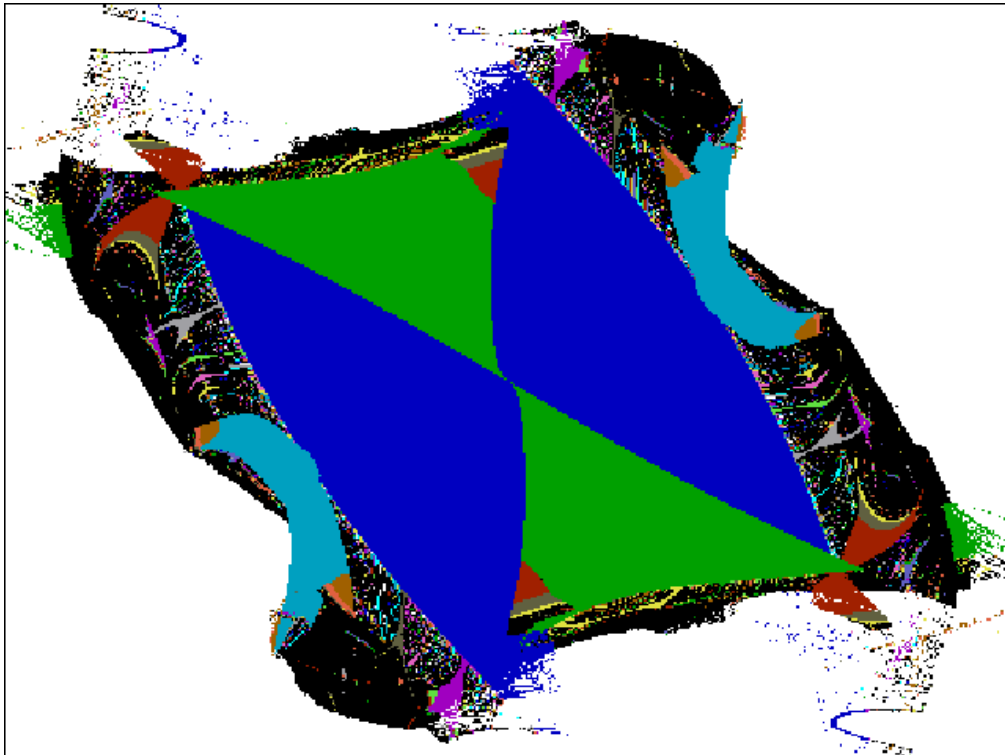


FIG. 11 – Formules  $S_3$  : vue d'ensemble, plan  $(a, b)$

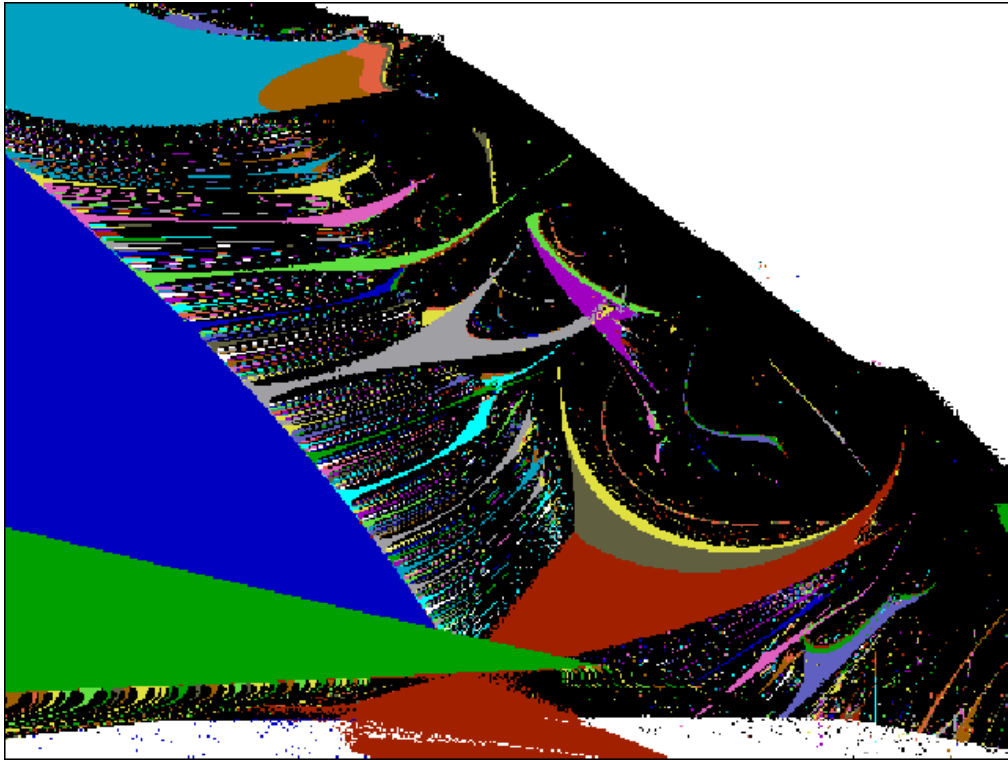


FIG. 12 – Formules  $S_3$  :forêts fractales primaires  $F_1$  et  $F_2$

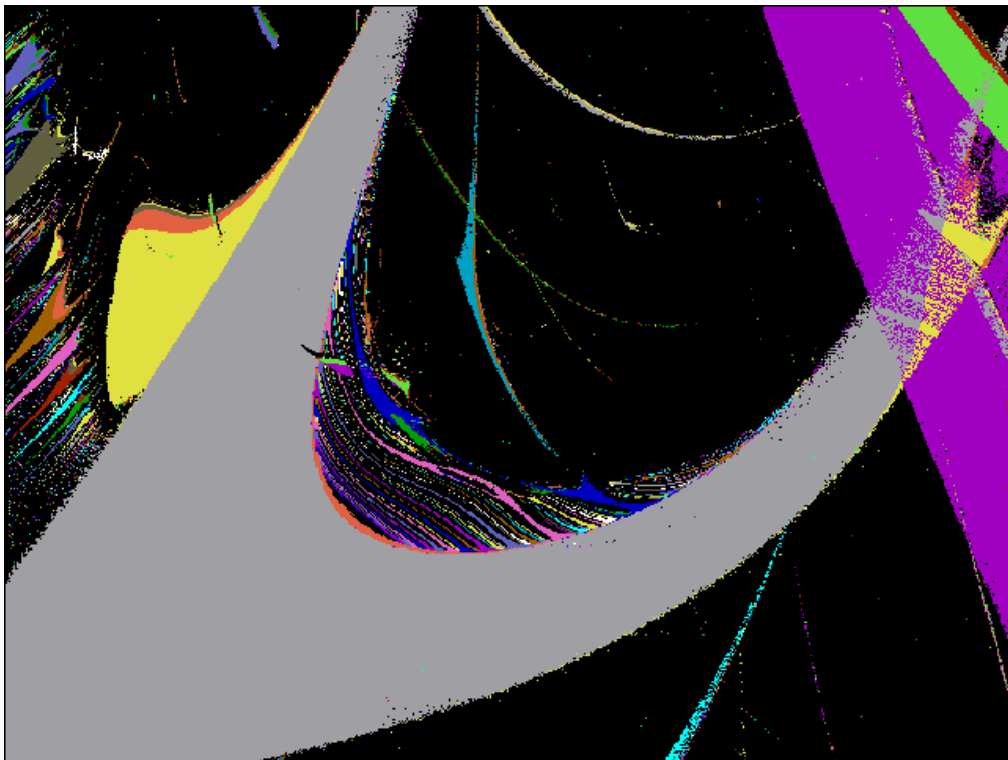


FIG. 13 – Formules  $S_3$  : forêt fractale primaire  $F_1$  et forêt secondaire  $F_7$

2. L'arbre  $7 : 2$  porte sur une partie de sa frontière sommitale, une forêt secondaire  $F_7$  dont les arbres représentent des 2-polygones  $7 : 2 \times n : m$ ; certains de ces arbres sont terminés, tandis que d'autres sont doublement enracinés : l'abscisse angulaire présente un extremum. Rappelons encore que les souches larges ne sont que des artefacts ; en réalité, les arbres ont des enracinements minces, comme sur la simulation 10. Il serait loisible de constater, à plus fort grossissement, que les arbres secondaires terminés sont eux-mêmes porteurs de forêts tertiaires (3-polygones), et ainsi de suite.
3. Des portions de longueurs non nulles de la frontière sommitale sont occupées par des cascades de bifurcations de FEIGENBAUM. On distingue les couleurs correspondant aux nombres successifs 14, 28, 56, 112. Ces cascades se poursuivent bien sûr selon une infinité d'étapes, jusqu'au domaine  $\mathcal{C}_2$ .
4. Il existe une frontière de longueur non nulle entre l'arbre  $7 : 2$  et  $\mathcal{C}_2$ , c'est-à-dire un passage direct possible entre un régime polygonal simple et un régime chaotique.
5. Un arbre atypique d'ordre 5 est visible à droite. On remarque sa frontière directe avec la zone chaotique du côté gauche, et une cascade de bifurcations en haut à droite (nombres 10, 20, etc.)
6. Les frontières de deux arbres, y compris leurs diverticules (cascades de bifurcations, forêts secondaires) peuvent se prolonger de manière à réaliser une zone de compétition où la suite doit choisir entre un régime issu du premier arbre et un régime issu du second.
7. Des zones de compétition existent deux régimes périodiques de tout type. En haut à droite de la figure, zone entre l'arbre  $7 : 2$  et l'arbre d'ordre 5 déjà cité. Il existe aussi des zones de compétition entre deux poulpes, ou entre un arbre et un poulpe. On y observe systématiquement, qu'il s'agisse d'un arbre et d'un poulpe, ou de deux poulpes, une organisation complexe, fractale selon deux directions distinctes, de la frontière entre les deux types de régimes.

Tous ces points pourraient être vérifiés également à partir des suites  $S_2$  et à partir d'autres suites anholonomes. Il semble apparaître cependant que le point  $\bar{6}$  n'est pas toujours respecté, c'est-à-dire qu'il serait nul et non avvenu. Ceci reste à confirmer par des analyses plus poussées, c'est-à-dire par des calculs plus profonds en itérations, donc plus longs.

## 4 Forêts fractales : quelques conjectures

Résumons pour commencer les résultats et conjectures classiques relatifs à la suite de MANDELBROT et JULIA :

1. A chaque valeur rationnelle de l'angle au sommet d'un polygone-limite correspond un arbre d'une forêt fractale (et ainsi de suite pour les  $p$ -polygones des forêts  $p$ -aires).
2. La hauteur  $h$  et la largeur  $\lambda$  d'un arbre  $n : m$  de la forêt fractale  $F_1$  ou d'une forêt  $F_p$  tendent vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
3. L'ensemble de MANDELBROT est compact et connexe.
4. Il est conjecturé qu'il est localement connexe.
5. La dimension fractale de sa frontière est égale à 2 (SHISHIKURA).
6. Il est conjecturé que l'aire de sa frontière est nulle.

Quelles sont les correspondants, quant aux suites anholonomes, des items précédents ? Nous laisserons de côté les questions de connexité simple, connexité locale ou connexité par

arcs des ensembles  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  ou  $\mathcal{C}$ , qui pourraient peut-être à cet égard posséder des propriétés individuelles très différentes. La question de la frontière entre les arbres d'une forêt fractale et  $\mathcal{C}_2$  semble en revanche plus universelle quant à sa réponse. Énonçons quelques conjectures plausibles, à partir des études expérimentales précédentes :

1. A chaque valeur rationnelle de l'angle au sommet d'un polygone-limite correspond un arbre d'une forêt fractale (et ainsi de suite pour les  $p$ -polygones des forêts  $p$ -aires). C'est le même énoncé que pour l'ensemble de MANDELBROT.
2. La hauteur  $h$  d'un arbre  $n : m$  d'une forêt fractale ne tend pas vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$  (il est possible par contre que les hauteurs des arbres tendent localement vers zéro, au voisinage d'un point de la frontière d'où la forêt est issue, ceci sans aucun lien avec les valeurs de  $n$ ).
3. La largeur  $\lambda$  d'un arbre n'est nulle pour aucune valeur positive de  $\delta$ .
4. Le rapport  $\lambda/\delta$  de la largeur d'un arbre sur la distance à sa frontière-source, que nous noterons maintenant  $\mathcal{F}$ , tend vers zéro lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Autrement dit, les deux frontières d'un arbre admettent la même tangente sur la frontière-source.
5. Sur toute courbe  $\mathcal{L}$  parallèle à  $\mathcal{F}$ , à distance  $\delta$  de  $\mathcal{F}$ , située à l'intérieur de la forêt fractale, l'ensemble des points de  $\mathcal{C}_2$  est un ensemble de CANTOR, c'est-à-dire un ensemble de longueur nulle, de dimension fractale (dimension de HAUSDORFF-BESICOVITCH)  $\phi$  strictement positive et strictement inférieure à 1, ayant la puissance du continu, confondu avec la frontière de l'ensemble des arbres de la forêt. Ceci revient à dire que le comportement de la suite à l'intérieur d'une bande de largeur non nulle délimitée par  $\mathcal{F}$  et une parallèle à  $\mathcal{F}$  est, sauf d'une manière négligeable, un accrochage sur un sous-harmonique du fondamental représenté par l'ensemble-source. Dit d'une troisième manière, si  $\gamma$  est l'angle au sommet du polygone idéalement régulier attaché au fonctionnement de la suite, et  $s$  une abscisse curviligne régulière prise sur  $\mathcal{L}$ , la fonction  $\gamma(s)$  est une fonction cantorienne du type *escalier du diable*. Cette fonction ne devient régulière qu'à la limite  $\delta \rightarrow 0$ , mais pour  $\delta = 0$  la courbe  $\mathcal{L}$ , confondue avec  $\mathcal{F}$ , appartient à  $\mathcal{C}_{1(1)}$ .
6. La dimension fractale (de HAUSDORFF-BESICOVITCH) de la frontière d'une forêt est égale à 2.
7. L'aire de la frontière d'une forêt est nulle.

Ces différentes conjectures peuvent être reliées, par exemple on peut déduire la conjecture numéro 6 des énoncés 2, 4 et 5 : on remarque pour cela que la dimension de l'ensemble de CANTOR intersecté par une parallèle à  $\mathcal{F}$  tend vers 1 lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , comme  $1 - A \cdot \delta^g$  où  $A$  est une constante et  $g > 1$ . L'analyse qui précède est caduque dans le cas de l'ensemble de MANDELBROT, non tant parce que  $g$  est cette fois égal à  $\frac{1}{2}$  mais parce qu'une parallèle quelconque à distance  $\delta$  non nulle de  $\mathcal{F}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'arbres de la forêt, passant au-dessus d'une infinité d'autres.

## 5 Les transitions vers le chaos

La transition vers le chaos s'effectue, pour une suite générique unidimensionnelle, dont le parangon est la suite de VERHULST, par une cascade de bifurcations. Le processus élémentaire est ici la bifurcation. A deux dimensions, on constate deux possibilités : suite de bifurcations comme à une seule dimension, ou bien déploiement en parapluie, c'est-à-dire passage à un sous-harmonique dont la période est un multiple quelconque de celle du fondamental. La bifurcation correspond quant à elle, à un sous-harmonique de période double du fondamental. D'autres

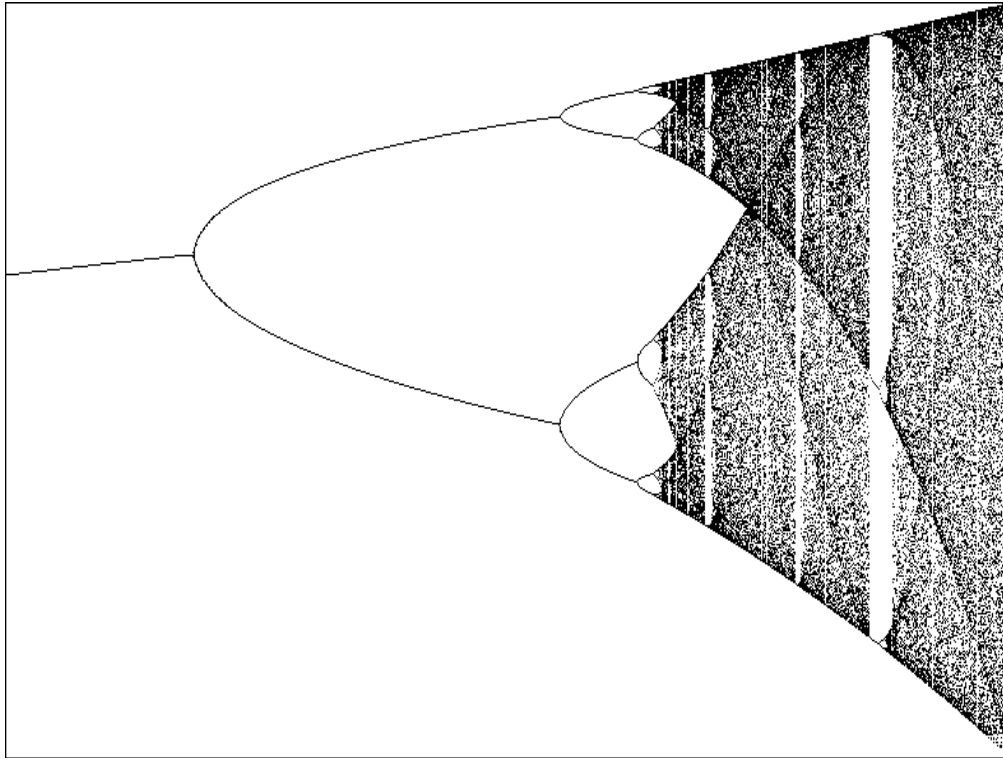


FIG. 14 – Suite de VERHULST : cascade de bifurcations

modes de transition peuvent-ils apparaître en dimensions supérieures à 2 ? L'éclatement de la suite après franchissement d'un seuil de transition donne lieu, sur une droite, à 2 points ; c'est la seule possibilité pour une suite à une dimension. A deux dimensions, l'explosion du point initial conduit à un polygone dont les sommets sont répartis sur une courbe homéomorphe à un cercle, et bien sûr ordonnés par la succession des itérations. Avec 3 dimensions, les points sont répartis sur une surface homéomorphe d'une sphère, ce qui semble nouveau. Cependant ces points sont encore ordonnés, ce qui autorise à les considérer toujours comme les sommets d'un polygone, cette fois-ci plongé dans  $\mathbb{R}^3$  au lieu de  $\mathbb{R}^2$ . L'espace de plongement du polygone ne change rien à la nature de la transition, qui reste du type déploiement en parapluie, ou bifurcation si le polygone ne possède que deux sommets. Il en est de même pour les dimensions supérieures à 3.

La cascade unidimensionnelle de la suite de VERHULST représentée en figure 14 exhibe une forme universelle, caractérisée par les constantes externe et interne de FEIGENBAUM, à condition que les extremums de la fonction utilisée soient génériques, c'est-à-dire paraboliques d'ordre 2 ; on remarque dès le démarrage du chaos, la présence de poulpes unidimensionnels d'ordres  $p$  variés mais toujours supérieurs à 2, apparaissant sous forme de bandes verticales claires. Le plus large d'entre eux correspond à  $p = 3$ . Chaque poulpe est délimité du côté gauche par une transition directe, et du côté droit (vers les plus grandes valeurs du paramètre  $a$ ) par un ensemble de cascades de bifurcations synchrones en  $a$ , affectant de la même façon chacun des points du  $p$ -uplet de la partie centrale du poulpe.

Aux poulpes, toujours présents, peuvent s'ajouter dans le cas des suites pluridimensionnelles, les arbres des forêts fractales comme autres domaines de type  $\mathcal{C}_1$  enclavés dans les domaines  $\mathcal{C}_2$ . Pour une suite bidimensionnelle, lorsque la sortie de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  par exemple, se fait du côté d'une forêt au lieu d'une cascade de bifurcations, le déploiement du point initial forme, dans un espace  $(s, x, y)$  où  $s$  désigne une abscisse curviligne le long du trajet régulier parcouru

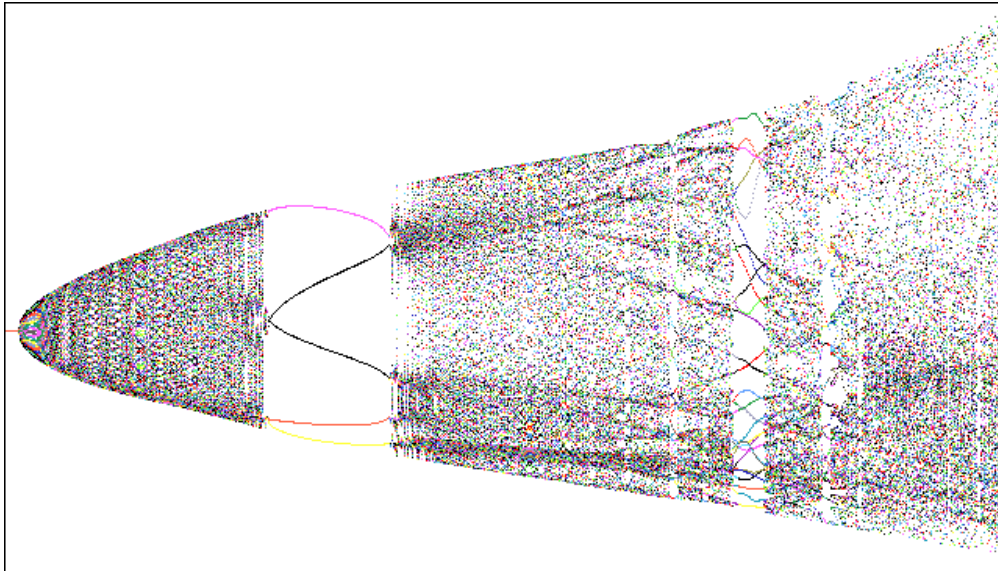


FIG. 15 – Formules  $S_2$  : déploiement en parapluie, projection latérale

dans le plan  $(a, b)$  des paramètres, un ensemble réparti sur une surface de forme ogivale. Nous appelons *déploiement en parapluie* ce type d'évolution. Les figures 15 et 16 en montrent deux échantillons, sous des vues différentes. On remarquera les traversées bien nettes des arbres de petits ordres, qui sont aussi les arbres les plus larges. Arbre 5 : 2 notamment sur la figure 15, qui n'est autre que le gros arbre violet de la figure 9, traversé du haut vers le bas sur cette figure lorsqu'on va vers la droite sur la figure 15. Ce chemin dans le plan  $(a, b)$  de la suite  $S_2$  est dessiné en (1) sur la figure 19, qui reprend l'ensemble de la figure 9. Si les conjectures présentées à la section 4 sont vraies, les points de chacune des tranches successives du parapluie sont en nombre fini à la limite d'une profondeur de calcul infinie. Les formes spiralées qui apparaissent dans les portions de la forêt où les ordres des arbres sont élevés, ou bien près de la frontière  $\mathcal{F}$ , montrent clairement la variation régulière, en l'absence d'accrochages durables, de l'angle au sommet  $\gamma$  des polygones successivement rencontrés. Cette régularité est interrompue lors des accrochages longs, pour des arbres de petits ordres et assez loin de  $\mathcal{F}$ . On remarque encore les transitions directes d'un arbre vers son environnement, c'est-à-dire, selon nos conjectures, vers d'autres arbres, sans notion aucune de bifurcation : différence avec le cas unidimensionnel, qui lève toute confusion possible entre un schéma du type cascade, figure 14, et un schéma du type parapluie, figure 15.

La figure 17 montre le détail, à fort grossissement, de la transition entre  $\mathcal{C}_{1(1)}$  et l'arbre 5 : 2. Le parcours est indiqué en (2) sur la figure 19; en réalité, il est environ 10 fois plus court que le trait blanc figuré. Il est très difficile de localiser précisément le point d'insertion de l'arbre sur la frontière  $\mathcal{F}$ , ceci étant dû aux faits que sa largeur  $\lambda$  devient infiniment petite par rapport à la distance  $\delta$  à  $\mathcal{F}$  et que la courbure de son axe n'est probablement pas nulle. Ce point ne peut apparaître sur la figure 19 à cause de l'artefact déjà mentionné, qui produit l'élargissement des souches des arbres, et de la profondeur de calcul nécessairement beaucoup plus faible de la carte  $(a, b)$  (8000 itérations avant affichage) par rapport à celle du parcours linéaire (100000 itérations).

Les schémas-modèles de la figure 18 présentent quelques images idéalisées (leurs sections sont des (1 à 3)-polygones réguliers) des attracteurs parents des sections de POINCARÉ étudiées pour deux scénarios de cascades. Début d'une cascade de FEIGENBAUM en haut, avec des attracteurs de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(2)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(4)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(8)}$  successivement. Débuts de deux cascades de

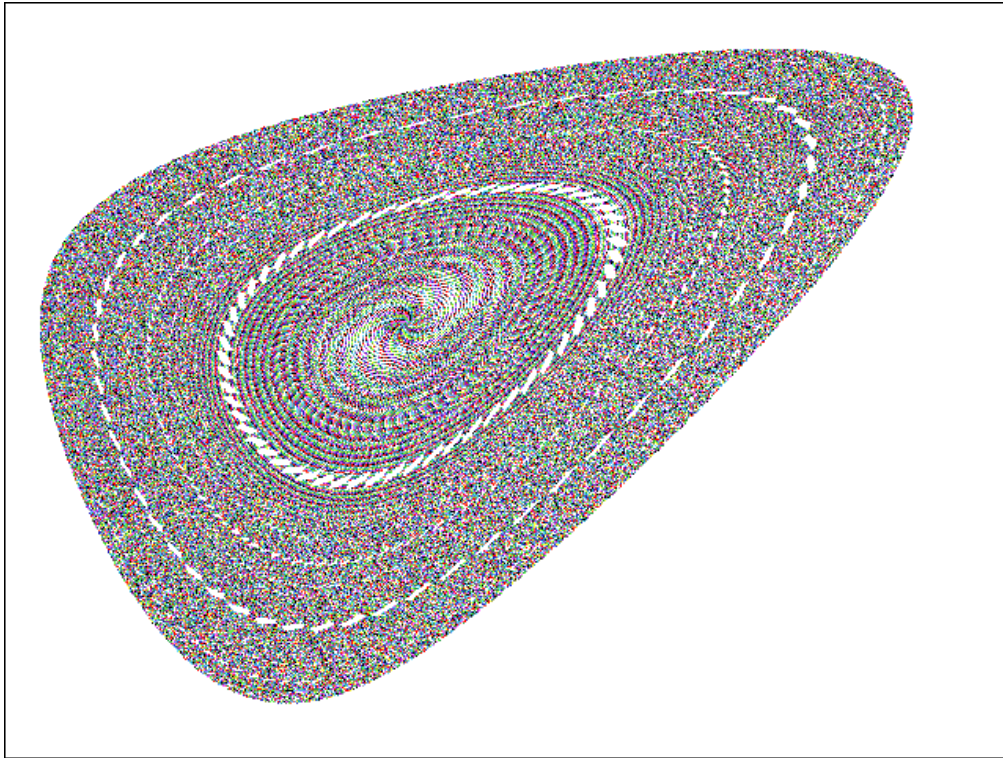


FIG. 16 – Formules  $S_{2a}$  : déploiement en parapluie, projection paraxiale

LANDAU en bas de la figure, correspondant à l'entrée dans un arbre d'une forêt primaire puis dans un arbre de sa sous-forêt (forêt secondaire), attracteurs de  $\mathcal{C}_{1(5)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(40)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(7)}$ ,  $\mathcal{C}_{1(35)}$  successivement. Les  $p$ -polygones correspondants sont indiqués en-dessous de chaque schéma. Si la probabilité de sortie de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  vers  $\mathcal{C}_2$  par une cascade complète de FEIGENBAUM est non négligeable (cette probabilité est un réel positif ordinaire), la probabilité de le faire par une cascade complète de LANDAU est, quant à elle, négligeable, c'est-à-dire qu'elle est égale à un nombre infiniment petit (nul en analyse standard).

La figure 18 n'illustre pas toutes les possibilités d'évolution d'un système lors d'un parcours régulier quelconque à travers le plan  $(a, b)$  des paramètres. Tous les mélanges, progressions et régressions imaginables sont possibles. A titre d'exemple, la figure 20 montre, en vue latérale, le déploiement obtenu lors du parcours (3) représenté en figure 19. On peut y observer, entre autres :

- A : traversée d'un arbre 8 : 3 (de couleur gris foncé sur la figure 19) avec, en entrée, parcours inverse d'une cascade de bifurcations.
- B : traversée d'un arbre 11 : 4 (cyan clair) ; sortie par un arbre d'ordre élevé de sa forêt secondaire visible sous forme de petits éclatements à la fin de chaque branche sur la figure 20.
- C, D, E : traversées d'arbres d'ordres 14, 17, 20 respectivement ; couleurs jaune, bleu, rouge. On peut vérifier l'existence ensuite de polygones à 23, 26, etc. sommets (suite arithmétique de raison 3, qui est l'ordre du gros arbre proche). A l'intérieur de la bande verticale d'ordre 23 sont discernables une bifurcation suivie de son inverse (recombinaison) ; ceci correspond à la traversée de la fourche sommitale de l'arbre d'ordre 23, probablement porteuse d'une cascade de bifurcations.
- F : entrée dans l'arbre 3 : 1 par une zone une fois bifurquée (appartenant à  $\mathcal{C}_{1(6)}$ ) puis nouvelle bifurcation (passage dans  $\mathcal{C}_{1(12)}$ ). Couleurs brun et rouge clair respectivement

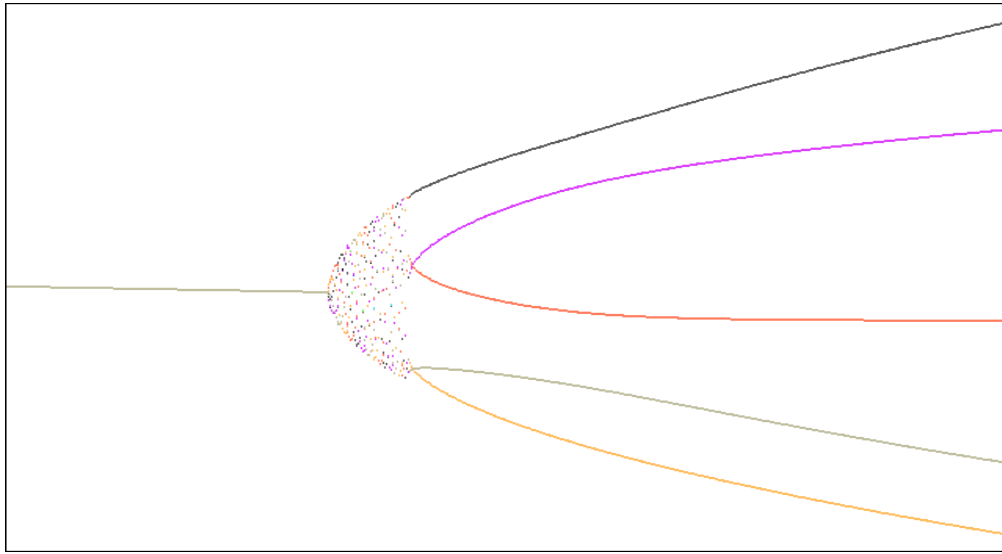


FIG. 17 – Formules  $S_2$  : déploiement en parapluie, voisinage de la racine d'un arbre 5 : 2

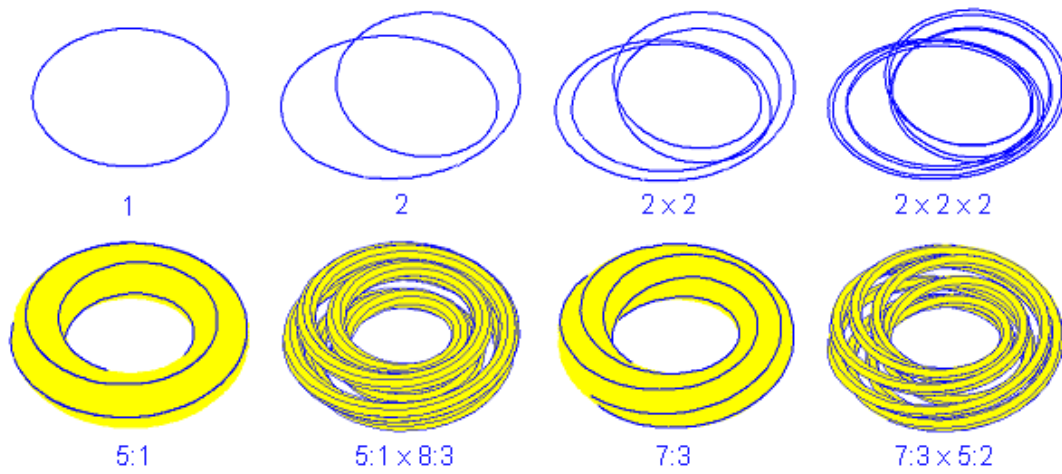


FIG. 18 – Evolutions vers le chaos

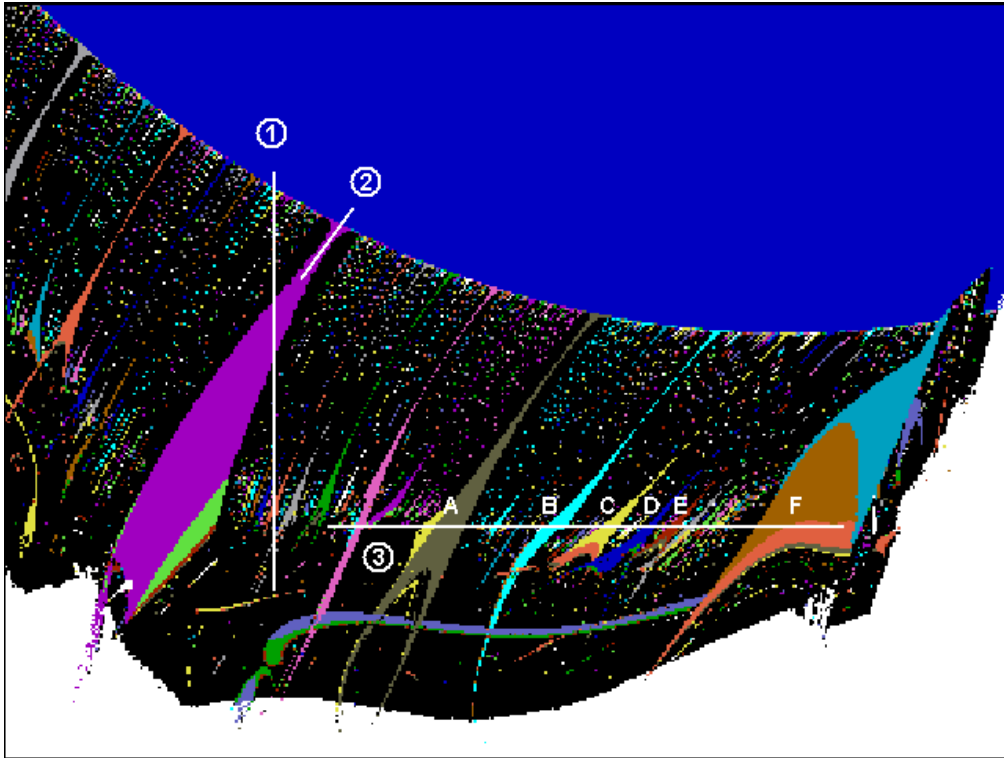


FIG. 19 – Suite bidimensionnelle  $S_2$ , traversées du domaine  $\mathcal{C}_2$  : trajets suivis

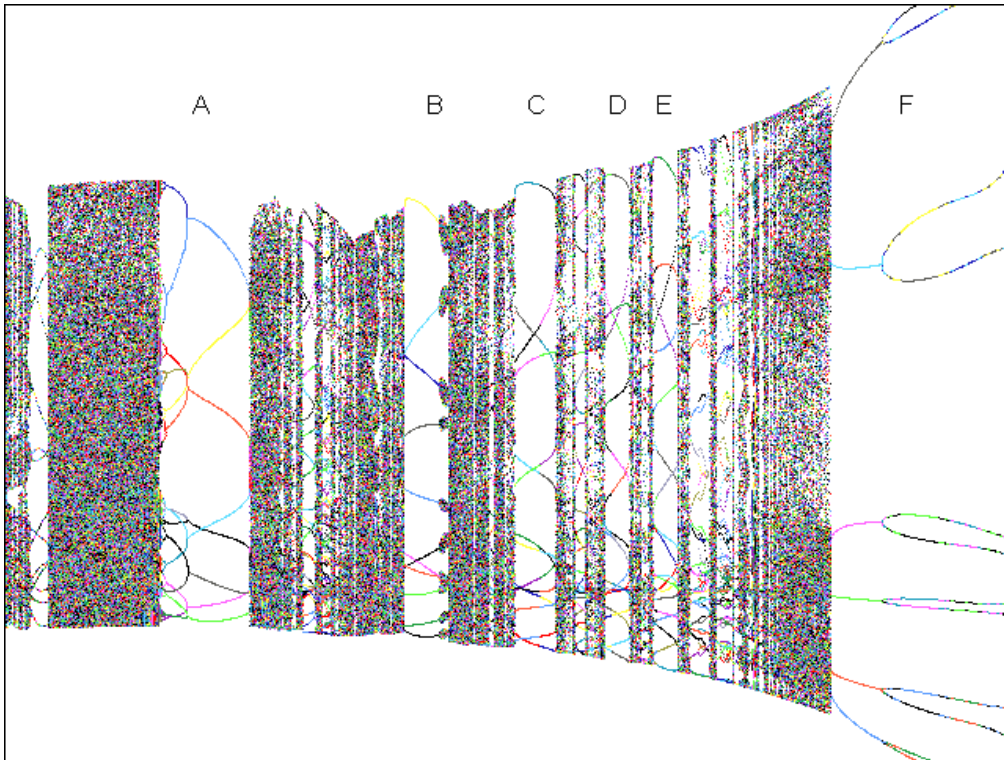


FIG. 20 – Suite bidimensionnelle  $S_2$ , traversée (3) du domaine  $\mathcal{C}_2$  : diagramme de déploiement

dans la figure 19.

On remarquera enfin la structure cantorienne globale, très nette, du graphe 20, à comparer avec la figure 14 qui, elle, n'en présente aucune trace évidente.

## 6 Conclusions

Les conclusions qui suivent se veulent génériques, c'est-à-dire qu'elles ne concernent pas les suites particulières, telles que les suites holonomes, ou les suites dont les fonctions présentent des extremums non génériques. Par conséquent on n'y retrouvera pas ce qui a été dit dans cet article au sujet des formules de MANDELBROT par exemple. De même seuls les comportements génériques sont évoqués, à l'exclusion de toute évolution de probabilité infiniment petite.

1. La transition depuis un système stable (section de POINCARÉ uniponctuelle) vers une zone chaotique ou qualifiée comme telle, ou vers la divergence, se fait dans le cas unidimensionnel par cascade de bifurcations.
2. Cette même transition, dans le cas  $p$ -dimensionnel avec  $p > 1$  peut revêtir quantité d'aspects. Tous ces aspects résultent de mélanges plus ou moins complexes entre bifurcations (polygone à 2 sommets) et déploiements en sous-harmoniques d'ordres plus grands que 2 (autres polygones). Une cascade infinie se termine toujours par une infinité de bifurcations et ne comporte jamais un nombre infini d'éclatements selon des polygones d'ordres supérieurs à 2. Des transitions par un nombre fini quelconque d'éclatements de tous ordres (égaux à 2 ou plus grands que 2) sont possibles.
3. On peut distinguer à l'intérieur de la région  $\mathcal{C}_2$  de l'espace des paramètres deux zones. Dans la zone de la forêt fractale, correspondant aux éclatements d'ordres supérieurs à 2, les points de  $\mathcal{C}_2$  forment un ensemble négligeable, de type ensemble de CANTOR. Dans la zone des poulpes, il est envisageable que l'ensemble de ces points soit de mesure non négligeable, au moins dans certaines sous-zones.
4. Les accrochages selon des 1-polygones sont la règle dans la région des troncs de la forêt fractale primaire. Ces accrochages ne sont évidemment pas négligeables. Il en est de même pour les accrochages selon des  $p$ -polygones (forêts  $p$ -aires).
5. Il résulte de l'item 4 que des attracteurs périodiques donnant lieu, en section de POINCARÉ, à des ensembles de points d'apparence très complexe, ne sont pas rares : les nombres de sommets des polygones ne sont pas bornés, et les cartes des forêts fractales et des poulpes montrent l'occurrence importante, en terme d'aire recouverte, des ordres élevés, surtout pour les 1-polygones. Ces derniers revêtent d'ailleurs l'aspect d'ensembles de points répartis non sur des cercles, mais sur des courbes qui, quoique homéomorphes à des cercles, sont volontiers très tortueuses. Dans ces conditions, la distinction par l'observation simple entre comportement cyclique et comportement chaotique devient impossible en général. En d'autres termes il est nécessaire quant au comportement d'un système mathématique ou physique, avant de parler de chaos, d'avoir éliminé toute possibilité d'être en présence d'un accrochage sur un régime périodique complexe.
6. Aucun des items précédents (sauf peut-être le numéro 1) n'est démontré, et de plus l'ensemble des suites auxquelles ils sont censés s'appliquer n'est pas clairement défini. Pour des démonstrations rigoureuses, il conviendrait d'abord de se limiter à un petit ensemble de suites, voire à une suite bidimensionnelle qui servirait de parangon, un peu comme la suite de VERHULST pour le cas unidimensionnel.
7. La particularité des éclatements d'ordre 2, qui sont les seuls présents à une dimension et qui continuent de jouer un rôle distinct de tous les éclatements d'autres ordres aux

dimensions plus élevées, si elle est clairement mise en évidence par l'expérience, n'est pas élucidée quant à son origine. Autrement dit, la cause du caractère négligeable des cascades de type LANDAU reste obscure, autant que celle du caractère non négligeable des cascades de type FEIGENBAUM.

8. Notons pour terminer une caractéristique remarquable des cartes dressées des plans  $(a, b)$ . Les différents régimes semblent se faire concurrence, et certains priment sur les autres. Ainsi, les parties de  $\mathcal{C}_1$  résistent-elles davantage à la divergence que  $\mathcal{C}_2$ , comme on peut le voir sur les figures 7, 9 et 11 : Autant les arbres que les poulpes se prolongent à l'intérieur de la zone  $\mathcal{D}$ . Plus généralement, tout semble se passer comme si différents feuilletts découpés, chacun correspondant à un comportement particulier, étaient superposés selon un certain ordre de priorité. Certains comportements semblent perdurer en sous-marin, voir par exemple les prolongements, au-delà d'une première zone de divergence, des portions convergentes de la carte de HÉNON figure 7. Boutonnères d'un poulpe d'ordre 3, sur la même carte, à l'intérieur de la zone  $\mathcal{C}_{1(1)}$ . Ce paradigme n'est cependant pas absolu, des intrications fractales, que nous avons déjà remarquées, se présentant volontiers à l'intersection de deux arbres, de deux poulpes, ou d'un arbre et d'un poulpe par exemple.

## 7 Annexes

### 7.1 Figures complémentaires

La figure 21 montre quelques polygones de la forêt déduite de la suite  $S_2$ . Lorsque le polygone comprend peu de sommets, il est facile de conclure que le régime est périodique. Ce n'est plus le cas lorsque le nombre de sommets devient un tant soit peu grand : la précision et la profondeur de calcul requises s'accroissent avec le nombre de sommets.

Sur les figures 22 et 23, les graphes de deux escaliers du diable. Le premier est déduit du parcours (3) de la figure 19 et correspond au déploiement de la figure 20 ; on y reconnaît les mêmes intervalles d'accrochage. En ordonnées, l'angle au sommet  $\alpha$  des polygones, axe gradué en demi-tour. Les portions vertes du graphe sont supposées régulières, elles proviennent de traversées de la région  $\mathcal{C}_2$  extérieure à la forêt fractale et ne font pas partie du graphe de l'escalier. A titre de comparaison, la figure 23 présente le graphe de la fonction escalier  $y = E_{\mathbb{T}}(x)$  obtenue à partir de l'ensemble triadique  $\mathbb{T}$  de CANTOR. Les intervalles ouverts formant le complément de l'ensemble triadique ont pour bornes inférieure et supérieure :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} + 2 \sum_{i=0}^p k_i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \quad \text{et} \quad 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} + 2 \sum_{i=0}^p k_i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \quad (3)$$

où  $k_0 = 0$ ,  $k_i = 0$  ou  $1$  pour  $i > 0$ . L'ensemble de ces intervalles est dénombrable : il suffit pour le vérifier de les indiquer par les entiers successifs au fur et à mesure qu'on les retire du segment  $[0, 1]$ . Leurs ordonnées respectives dans l'escalier sont données par :

$$y(k_1, k_2, \dots, k_p) = 1 + \sum_{i=0}^p \left(k_i - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (4)$$

Les éléments de  $\mathbb{T}$  ont quant à eux pour valeurs

$$x(\{k_i\}) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \quad (5)$$

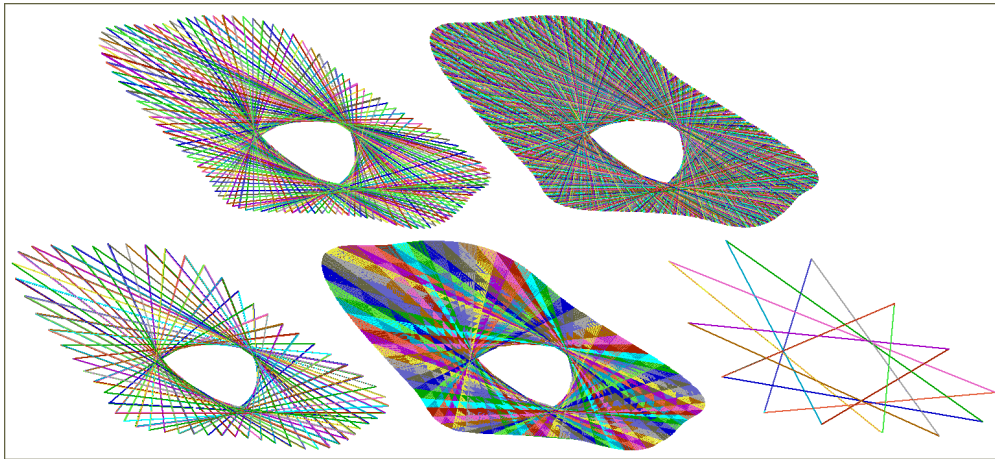


FIG. 21 – Suite  $S_2$  : quelques polygones de la forêt  $F_1$

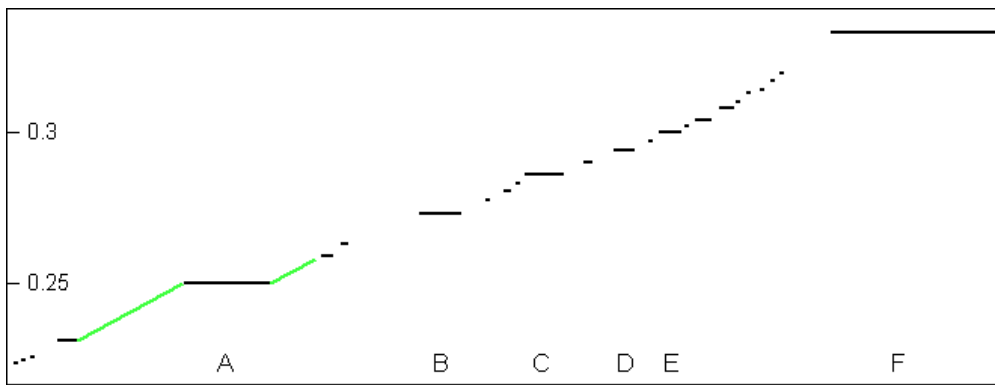


FIG. 22 – Escalier du diable expérimental, suite  $S_2$

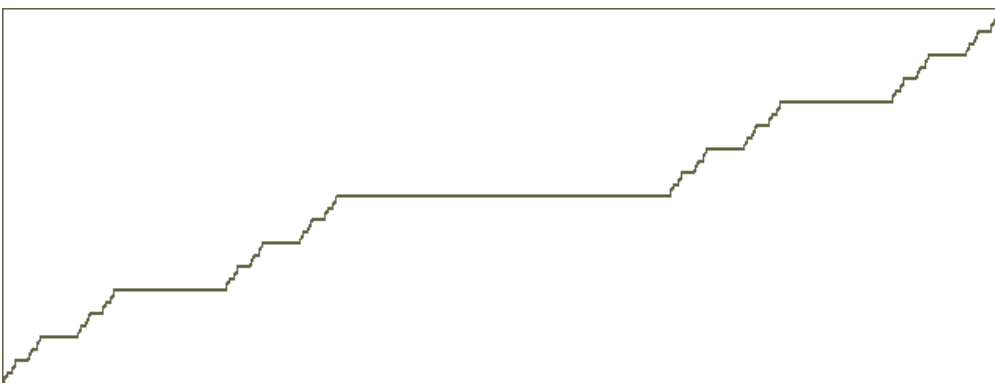


FIG. 23 – Fonction escalier  $E_{\mathbb{T}}(x)$  correspondant à l'ensemble triadique  $\mathbb{T}$  de CANTOR : rectangle  $[0, 1] \otimes [0, 1]$

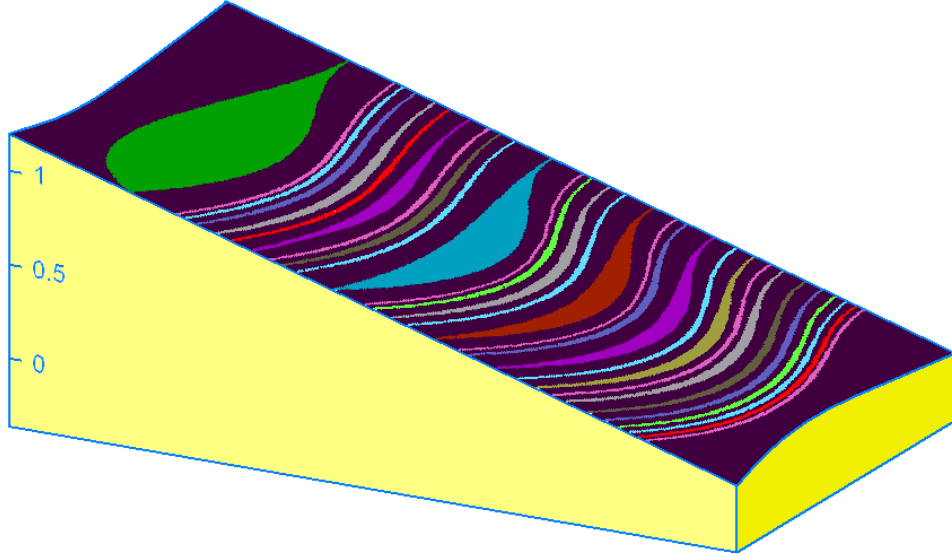


FIG. 24 – Escalier du diable correspondant à la forêt fractale modélisée, déjà représentée en figure 10. Les marches en couleurs sont horizontales ; il en existe une infinité d'autres dans les zones laissées en noir. La cote verticale représente l'angle au centre des polygones (unité :  $\pi$  rad).

L'équation précédente fournit leur développement  $\{k_i\}$  avec des  $k_i$  égaux soit à 0 soit à 1. Ce développement permet de mettre l'ensemble  $\mathbb{T}$  en bijection avec le segment  $[0, 1]$ , ce qui montre que  $\mathbb{T}$  a la puissance du continu. Les ordonnées respectives des éléments de  $\mathbb{T}$  sur le graphe de l'escalier sont :

$$y(\{k_i\}) = E_{\mathbb{T}} [x(\{k_i\})] = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (6)$$

Plus généralement, les éléments d'un ensemble  $\mathbb{K}_{\alpha}$  formé selon le même principe que  $\mathbb{T}$ , mais avec retrait d'un intervalle central  $]\alpha, 1 - \alpha[$ , avec  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}]$  ont pour valeurs

$$x(\{k_i\}) = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \alpha^i \quad (7)$$

Un tel ensemble  $\mathbb{K}_{\alpha}$  (par exemple l'ensemble  $\mathbb{T} = \mathbb{K}_{\frac{1}{3}}$ ) a pour dimension fractale  $\delta = -\frac{\ln 2}{\ln \alpha}$ .

Cette dimension  $\delta$ , lorsque  $\alpha = \frac{1}{2} - \varepsilon$  se développe au premier ordre en  $1 - \frac{2\varepsilon}{\ln 2}$ .

Si, comme nous le supposons, les frontières des troncs des arbres des forêts fractales sont fermées, alors tout élément de l'ensemble cantorien dont les nombres du développement  $\{k_i\}$  sont tous nuls ou tous égaux à 1 à partir d'un certain rang appartient à un arbre. Autrement dit, on forme un ensemble de CANTOR  $\mathbb{K}'_{\alpha}$  plus petit, en retirant des segments au lieu de retirer des intervalles ouverts. Ce nouvel ensemble possède encore la puissance du continu et les éléments retirés forment un ensemble infini, mais dénombrable. Les segments retirés et les éléments de  $\mathbb{K}'_{\alpha}$  forment une partition du segment  $[0, 1]$  en segments dont la plupart sont réduits à un seul point. Les marches de l'escalier modèle représenté en figure 24 ont des rebords fermés.

## 7.2 Tableau des paramètres de calcul

Dans le tableau qui suit figurent :

- colonne *graphe* : les noms des variables portées respectivement en abscisses et en ordonnées ;
- $x_0, y_0$  : les valeurs initiales des variables  $x$  et  $y$  ;
- $a_1, a_2$  : les valeurs extrêmes du paramètre  $a$  sur le graphe ;
- $b_1, b_2$  : de même pour le paramètre  $b$  ;
- $\Delta a, \Delta b$  : les résolutions respectives pour les paramètres  $a$  et  $b$  (dimensions des pixels rectangulaires) ;
- $T$  : le tampon, c'est-à-dire le nombre d'itérations effectuées avant d'analyser le comportement de la suite ;
- $E$ , l'échantillon, nombre d'itérations suivant le tampon, servant à l'analyse du comportement. Les attracteurs finis détectables possèdent au maximum  $\frac{E}{2}$  points, autrement dit on va jusqu'à  $\mathcal{C}_{1(\frac{E}{2})}$  ;
- $\Delta s$  : distance euclidienne dans le plan  $(x, y)$  en-dessous de laquelle deux points sont déclarés confondus.

Après exécution d'un nombre d'itérations égal à  $T$ , la trajectoire suivie est supposée avoir rejoint un attracteur avec une approximation acceptable ; ce n'est pas toujours le cas cependant, comme nous l'avons vu avec le problème des souches des arbres : convergence très lente au voisinage de la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  (aussi bien du côté intérieur que du côté extérieur).

Le choix de la valeur de  $\Delta s$  doit être fait soigneusement, et nécessite toujours un compromis. S'il est trop grand, de faux attracteurs périodiques peuvent être détectés (fausses forêts dans le cas HÉNON, fausses souches des vrais arbres). S'il est trop petit, de vrais attracteurs périodiques au contraire passeront inaperçus. A haute résolution, les erreurs d'arrondis doivent aussi être prises en compte pour le choix de la valeur de  $\Delta s$ .



Fig.	page	Formules	graphe	$x_0$	$y_0$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$\Delta a$	$\Delta b$	$T$	$E$	$\Delta s$
2	5	$M$	$a \otimes b$	0	0	-1.85	0.55	-1	1	.004	.004	2000	200	.002
3	6	$M$	$a \otimes b$	0	0	-0.17	-0.146	1.024	1.044	.00003	.00003	2000	200	.002
6	9	$S_1$	$a \otimes b$	0	0	-2.35	-0.85	-0.6	0.6	.002	.0025	2000	200	.002
7	9	$H$	$b \otimes a$	1.11254	1.10563	-0.5	2.3	-1.6	1.2	.005	.003	4000	200	.001
8	10	$S_2$	$a \otimes b$	0	0	-1.12	0.32	-0.45	0.8	.0025	.0025	2000	200	.002
9, 19	10, 20	$S_2$	$a \otimes b$	0	0	-0.85	-0.25	-0.45	-0.2	.0015	.0008	8000	200	.001
11	12	$S_3$	$a \otimes b$	0	0	-0.35	0.35	-0.45	0.45	.0015	.0025	3000	200	.002
12	13	$S_3$	$a \otimes b$	0	0	0.165	0.305	-0.27	0.1	.00025	.0008	3000	200	.002
13	13	$S_3$	$a \otimes b$	0	0	0.22	0.25	-0.075	-0.04	.00005	.00006	3000	800	.001
14	16	$V$	$a \otimes x$	0.25679	-	2.5	4	0	1	.003125	.00208	500	100	-
15	17	$S_2$	$b \otimes x$	0	0	-0.687	-	-0.4	-0.26	-	.00015	100000	100	-
16	18	$S_{2a}$	$x \otimes y$	0.45	0.95	1.1	1.2	-	-	.001	-	6000	600	-
17	19	$S_2$	$s \otimes x$	0	0	-0.66	-0.645	-	-	.00002	-	100000	25	-
20	20	$S_2$	$a \otimes x$	0	0	-0.67	-0.38	-0.375	-	.00015	-	100000	100	-

TAB. 2 – Paramètres des figures