

# Etudes détaillées de suites multidimensionnées

## Mathématiques expérimentales

Marc MICHAUT\*

\* IPEST de La Marsa, Tunisie

Mai 2008

### Résumé

Les portraits de MANDELBROT, c'est-à-dire la carte des comportements, dans l'espace des paramètres, des suites multidimensionnées, présentent des structures ressemblantes, plus facilement identifiables lorsque les formules impliquées sont simples, qui se retrouvent indépendamment des fonctions employées, et indépendamment de la dimension de la suite lorsqu'on considère un plan de MANDELBROT, c'est-à-dire lorsqu'on se limite à 2 paramètres. Il est très probable que des structures analogues se trouvent aussi dans des espaces de plus de 2 paramètres. A 2 dimensions, ces structures sont essentiellement des poulpes à 4 prolongements, et des forêts fractales formées d'arbres parallèles. Les transitions vers le chaos apparaissent de 3 types : frontière directe ; cascade de bifurcations ; traversée d'une forêt. Dans une première étude, nous cherchons à justifier, à partir de la notion générale de catastrophe, la forme canonique quadrifide des poulpes, puis nous observons plus qualitativement des poulpes perturbés, lorsque les fonctions génératrices sont moins simples. Nous examinons ensuite plus en détail la distinction entre déploiements uni- et bidimensionnels, ce qui nous amène à la relativiser et, en passant, à modéliser la forme d'un arbre canonique. Une étude expérimentale suivante de déploiements polygonaux, dans les cas de suites à 2, puis à 10 dimensions, montre plus en détail la dégradation d'un polygone au cours de l'évolution vers le chaos, ainsi que le bien-fondé de l'hypothèse de l'absence de tout autre type de déploiement que le déploiement polypolaire ou le déploiement polygonal. L'impossibilité en général de distinguer entre polypôle et polygone, sauf pour les suites unidimensionnées ou pour des sous-ensembles négligeables du plan des paramètres, est également mise en évidence par ces simulations. Nous terminons par une incursion dans le domaine des suites de dimensions plus grandes, avec un essai d'étude à 100 dimensions, et toujours 2 paramètres. On peut tenter de conclure que, malgré leur aspect complexe et rébarbatif, accompagné d'une structure systématiquement fractale, les portraits de MANDELBROT des suites se laissent ramener à un assemblage de structures standard, ces dernières de plus en plus déformées et souvent peu reconnaissables, mais toujours sous-jacentes lorsque les formules mathématiques de la suite se complexifient. Ceci pourrait constituer une caractéristique générale des systèmes de faible complexité algorithmique et de complexité logique infinie.

Mots-clés : *attracteur ; bifurcation ; carte ; cascade ; convergence ; fractal ; section, suites ; transition ; zonage*

Principaux noms d'auteurs cités : *Feigenbaum ; Hénon ; Landau ; Mandelbrot ; Poincaré ; Thom ; Verhulst*

 1 17	 5 21	 9 25	 13 29	 domaine $\mathcal{C}_2$
 2 18	 6 22	 10 26	 14 30	 divergence
 3 19	 7 23	 11 27	 15 31	
 4 20	 8 24	 12 28	 16 32	

FIG. 1 – Code des couleurs

## Introduction

Pour quelle raison toutes les structures que nous avons appelées *poulpes*, correspondant à un éclatement unidimensionnel d'une suite, se présentent-elles en général, dans un plan de paramètres, sous une forme remarquable à 4 prolongements infinis? Pourquoi cette forme persiste-t-elle, même lorsque la dimension de la suite devient grande (nous l'avons vérifié pour  $d = 100$  dimensions)? Les déploiements de toutes les suites s'expliquent-ils toujours en termes d'éclatement unidimensionnel, ou d'éclatement bidimensionnel, à l'exclusion de toute autre possibilité? Telles sont les questions que nous essaierons d'aborder, en cherchant, soit une approche morphogénétique, soit plus platement, des illustrations expérimentales qui étayeront nos conjectures. L'exploration de dimensions plus élevées que 1 ou 2 permettra d'étendre l'universalité supposée de ces dernières, en même temps qu'elle nous rapproche des systèmes physiques usuels dont le nombre de degrés de liberté est grand en général. Les figurations de plans de MANDELBROT  $(a, b)$  seront encore à l'ordre du jour; le code des couleurs utilisé est rappelé sur la figure 1 afin de faciliter la lecture de ces cartes. Les couleurs sont définies modulo 16, la suite se prolongeant bien entendu au-delà de 32. La notation  $\mathcal{C}_2$  dans la légende de la figure 1 concerne le domaine de convergence non périodique, réputé chaotique; le domaine de convergence vers un point unique sera quant à lui désigné par  $\mathcal{C}_{1(1)}$ .

## 1 Structures des poulpes des suites de petites dimensions

### 1.1 Poulpes simples : catastrophe *fronce* modifiée

On constate, dans les plans de paramètres de suites de dimension supérieure ou égale à 2, une universalité relative de la forme des poulpes. La figure 2 montre un exemplaire typique, tiré de la suite de HÉNON. Il s'agit d'un poulpe d'ordre 5. On voit aussi sur cette figure des poulpes plus petits, d'ordres plus élevés, qui ont la même forme. Le nombre de prolongements infinis est toujours égal à 4 et le nombre de courbes d'entrée dans le poulpe depuis la zone chaotique interne est toujours égal à 3. On distingue la courbe de base, qui contient le point noté  $A$  sur la figure 2, et les deux courbes d'antennes, gauche (point  $B$ ) et droite (point  $C$ ). L'analyse précise du comportement de la suite aux différents points d'entrée dans le poulpe d'ordre 5 se fait en itérant 5 fois les formules de HÉNON. On obtient ainsi des relations du type :

$$x_5 = f(x, y) \qquad y_5 = g(x, y) \qquad (1)$$

où  $x_5, y_5, x$  et  $y$  désignent respectivement  $x_{n+5}, y_{n+5}, x_n$  et  $y_n$ . Ces formules étant utilisées par l'aide au calcul, il est inutile de les expliciter. Pour qu'un point  $(X, Y)$  appartienne au pentagone, il est nécessaire que les deux fonctions  $\varphi(x, y) = f(x, y) - x$  et  $\gamma(x, y) = g(x, y) - y$  s'annulent simultanément pour  $x = X$  et  $y = Y$ . Les graphes de la figure 3 représentent les zéros de  $\varphi(x, y)$  (courbes rouges,  $\Phi$ ) et de  $\gamma(x, y)$  (courbes bleues,  $\Gamma$ ) pour les valeurs des paramètres  $b$  et  $a$  qui constituent les coordonnées des points  $A, B, C$  dans le plan de MANDELBROT de la figure 2. Comme dans le cas des poulpes des suites à un seul paramètre,

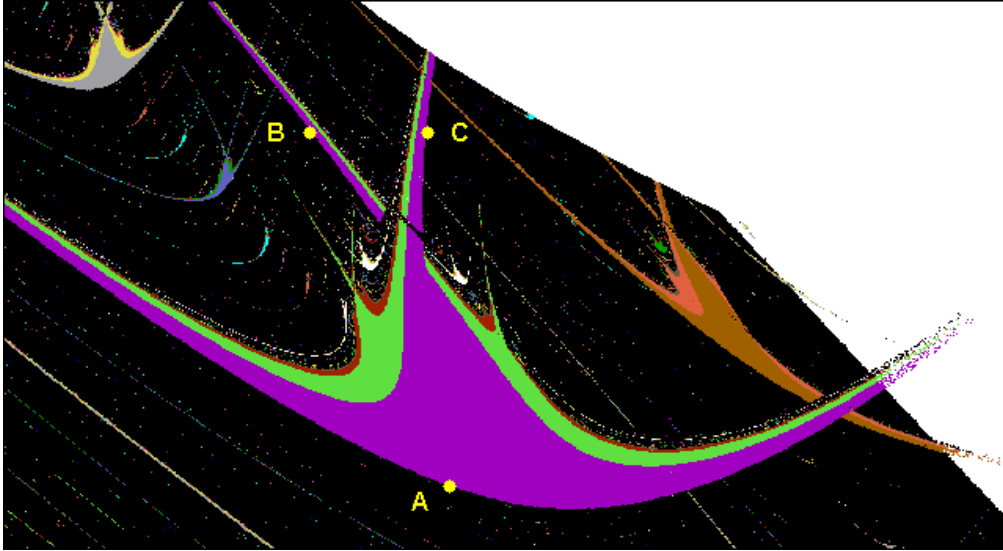


FIG. 2 – Plus gros poulpe d'ordre 5 des formules de HÉNON, paramètres  $b$  en abscisses et  $a$  en ordonnées. On distingue à droite un poulpe d'ordre 6 et en haut à gauche des poulpes d'ordres 7, 12, 11, 9, 11 et 12, de tailles d'autant plus petites que leur ordre est élevé. Tous sont isomorphes, ainsi que les poulpes satellites.

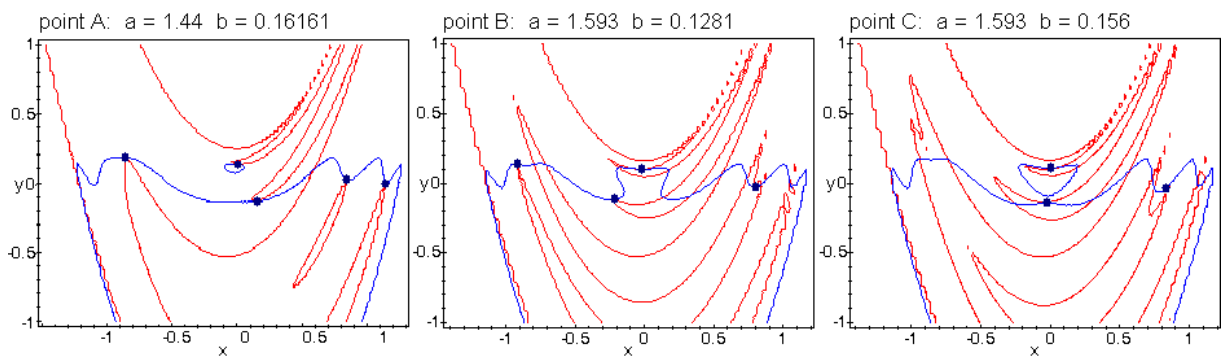


FIG. 3 – Courbes  $\Phi$  (rouge) et  $\Gamma$  (bleue) réelles pour les points d'entrée  $A, B, C$  dans le poulpe d'ordre 5. Les points bleu foncé, points doubles d'intersections de  $\Phi$  et de  $\Gamma$ , sont caractéristiques des frontières du poulpe.

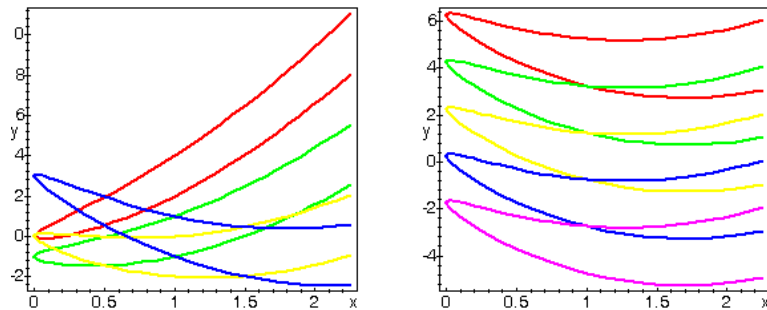


FIG. 4 – Courbes  $\Phi$  du modèle de potentiel-fronce non standard pour  $b = 1$  et  $a = -2; 0; 2; 4$  à gauche; pour  $a = 3$  et  $b = -4; -2; 0; 2; 4$  à droite

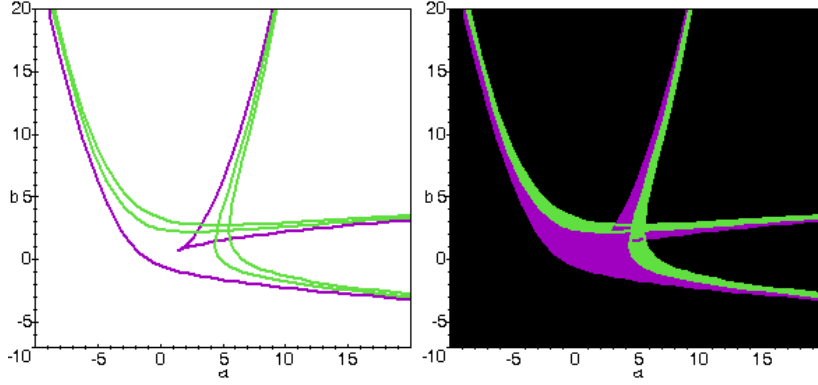


FIG. 5 – Courbes d'entrée dans le poulpe-modèle, en violet, et courbes de sorties du poulpe et de son sous-poulpe approximées, en vert. Le même modèle colorié à droite, à comparer avec l'original de la figure 2.

l'entrée dans le poulpe correspond à l'apparition de nouveaux points d'intersection entre deux courbes, ici  $\Phi$  et  $\Gamma$ , c'est-à-dire à l'existence de points de tangence entre ces deux courbes. On constate, en  $A$ ,  $B$ ,  $C$  : 5, 4 et 3 points de tangence respectivement. Dans le cas uniparamétré, l'une des courbes est une droite tandis que l'autre constitue le graphe d'une fonction. Toujours dans le problème uniparamétré, l'entrée dans le poulpe peut être justifiée par exemple par une catastrophe originale, distincte du répertoire de René THOM, de potentiel :

$$y(t, a) = t^2 - a. \quad (2)$$

La situation biparamétrée laisse davantage de possibilités, comme on le constate sur la figure numéro 3 : la déformation générique la plus simple d'une courbe présentant un point de tangence avec une autre est une inflexion, qui lui donne même concavité sur ses deux branches. Ainsi la tangence peut avoir lieu sur le point bas, sur le point médian, ou sur le point haut. A ces 3 possibilités correspondent 3 courbes d'entrée dans le poulpe, sans nécessairement qu'à un type de point d'entrée corresponde une courbe. Nous modéliserons la courbe  $\Gamma$  par une droite horizontale d'équation  $y = 0$ , tandis que  $\Phi$  sera représentée par les équations paramétriques modèles

$$x(t, a, b) = t^2 \quad y(t, a, b) = \left(t^2 - \frac{a}{2}\right)^2 - t - b. \quad (3)$$

La figure 4 montre l'évolution de la courbe  $\Phi$  en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . L'intersection-modèle entre  $\Gamma$  et  $\Phi$  est gouvernée uniquement par la fonction  $y(t, a, b)$ , la fonction  $x(t, a, b)$  qui ne dépend ni de  $a$ , ni de  $b$ , n'ayant aucune importance. Les lieux catastrophiques sont les points d'entrée dans le poulpe, déterminés par le système d'équations

$$y(t, a, b) = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial t}(t, a, b) = 0, \quad (4)$$

équations paramétriques en  $a$  et  $b$  qui délimitent le poulpe dans le plan de MANDELBROT modèle. Après résolution, on trouve

$$a = \frac{4t^3 - 1}{2t} \quad b = \frac{1 - 16t^3}{16t^2}. \quad (5)$$

La courbe résultante est montrée sur la figure 5 sous la forme des courbes violettes. La catastrophe *fronce* de THOM est quant à elle déterminée par le potentiel standard

$$y_s(t, a, b) = t^4 - a \cdot t^2 - b \cdot t \quad (6)$$

qui diffère de la fonction  $y(t, a, b)$  proposée en (3). Associé à une fonction  $y(t, a, b) = C$  où  $C$  est une constante non nulle, comme modélisation de la courbe  $\Gamma$ , le potentiel de THOM produit des courbes non isomorphes à celles de la figure 5. La fronce de THOM n'est pas la catastrophe impliquée dans les poulpes biparamétrés les plus simples, bien qu'elle soit de mêmes dimension et codimension, et de même degré que le potentiel (3). Les courbes de sortie de poulpe et de sortie du sous-poulpe d'ordre 10 (en vert sur la figure 5) sont obtenues de façon approximative en donnant à la dérivée  $\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, b)$  les deux valeurs déterminées  $-6$  et  $-8$ . Un coloriage parachève le modèle.

On peut vérifier la stabilité et donc la généralité de la forme obtenue pour le poulpe-modèle en modifiant le potentiel (3) de différentes manières. On vérifie aussi que la même forme s'obtient par intersection de deux paraboles de formes et d'orientations invariables, d'axes inclinés l'un par rapport à l'autre, l'une étant fixe et l'autre ayant  $(a, b)$  comme coordonnées sommitales (voir le résultat page 27).

## 1.2 Poulpes perturbés

En général les poulpes à 2 dimensions ne présentent pas de forme aussi simple que celle qui vient d'être étudiée. Nous allons perturber progressivement les formules de HÉNON par un terme sinusoïdal : formules  $HP_h$ , page 22. La figure 6 montre le poulpe d'ordre 5 non perturbé, puis de plus en plus déformé au fur et à mesure que la constante  $h$  prend des valeurs plus élevées. Pour  $h$  petit, on constate essentiellement une déformation isomorphe des poulpes. Ensuite il apparaît de nouvelles formes, par multiplication des images de certaines parties du plan initial. En utilisant cette notion d'image, nous conjecturons qu'il existe au moins une application du plan perturbé vers le plan d'origine non perturbé, qui conserve l'ordre de convergence. Nous conjecturerons aussi que cette application peut être choisie continue et différentiable, à condition que les fonctions qui définissent les suites non perturbée et perturbée soient continues et différentiables. L'application en question semble rester pour l'essentiel bijective lorsque la perturbation ne dépasse pas un certain seuil ; elle devient ensuite surjective et donc n'admet plus d'application inverse. La figure 7 montre un détail du plan le plus perturbé. On y distingue clairement les multiplications de certains motifs (morceaux de poulpes) et l'apparition de boutonnières provenant du repliement du plan d'origine. Ces dernières se modélisent par exemple à l'aide du potentiel-pli de THOM, de manière intersective :

$$y = x^3 + a \cdot x \tag{7}$$

ou par combinaisons de plusieurs plis (schémas sur la figure 8). On relèvera l'analogie avec les transformations, elles aussi surjectives, obtenues par des procédés optiques, réflexion sur un miroir courbe ou réfraction à travers un dioptré courbe (miroir et dioptré continus et différentiables). La figure 9 illustre cette ressemblance.

Lorsque la forme du potentiel-catastrophe (3) est compliquée par l'ajout d'un terme sinusoïdal, le poulpe simulé se complique lui aussi. Les courbes paramétriques  $[x(t), y(t)]$  présentent de nombreux extremums et se déforment davantage lorsque  $a$  et  $b$  varient (figure 10). Il en résulte un poulpe-modèle dont l'allure à grande échelle est préservée, mais qui présente dans le détail une répétition de points de rebroussement (au lieu d'un seul en l'absence de perturbation) et une démultiplication de certaines de ses parties. Ce type de modélisation semble convenir pour expliquer l'observation directe.

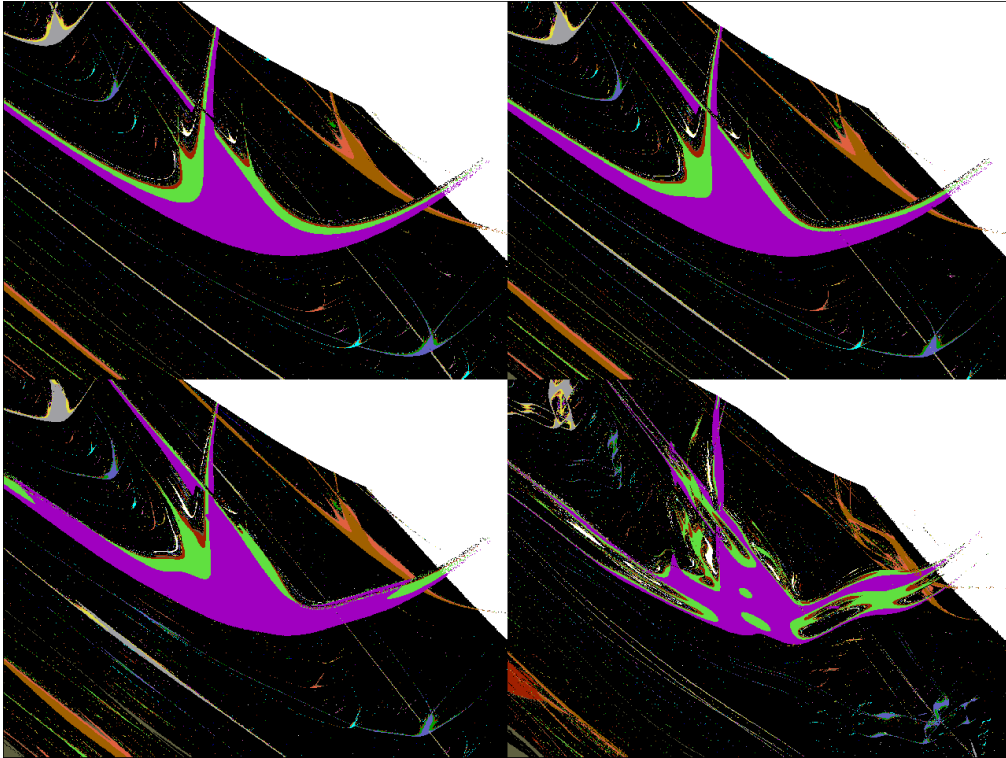


FIG. 6 – Formules de HÉNON perturbées  $HP_h$  (voir page 22). La constante perturbatrice  $h$  du terme sinusoïdal prend les valeurs successives : 0 ; 0.00075 ; 0.0015 ; 0.005. Remarquer la répétition par 6 ou même par 8 du petit poulpe d'ordre 9, en bas à droite, lorsque  $h = 0.005$ , ainsi que le fort déplacement des têtes des poulpes visibles en bas à gauche, dès la valeur  $h = 0.0015$ .

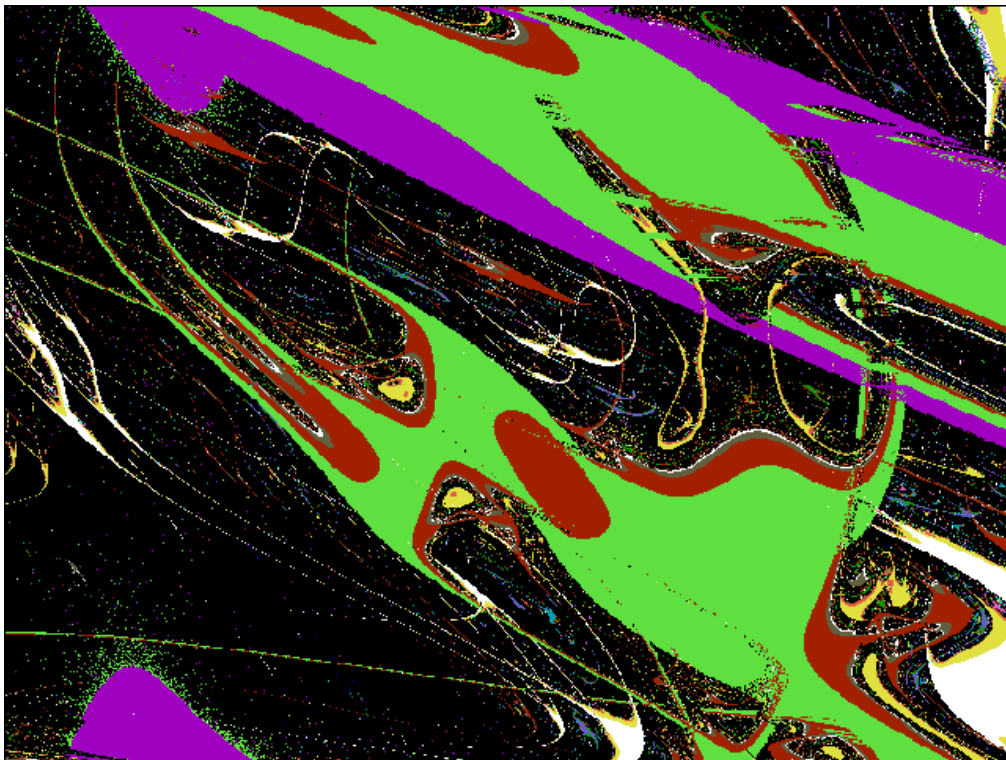


FIG. 7 – Détail des poulpes dans le plan perturbé avec  $h = 0.005$  : remarquer les images multiples.

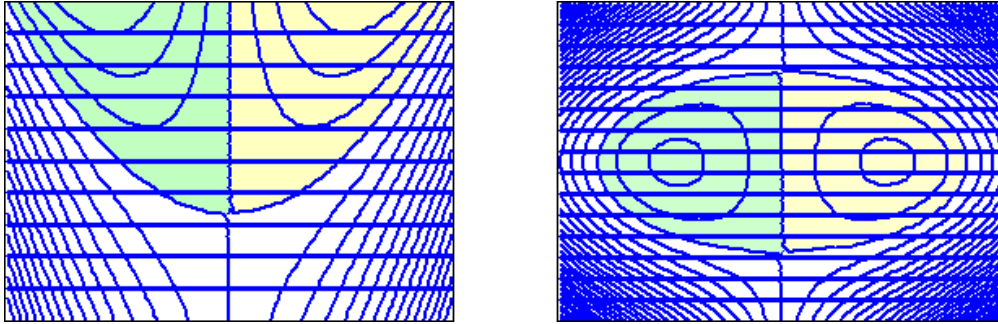


FIG. 8 – Pli simple de THOM et pli double. Il s'agit d'applications surjectives; la métrique image n'est pas isomorphe de la métrique cartésienne d'origine; les zones colorées correspondent aux régions tripliquées du plan d'origine. La surjection a lieu lors de l'application du plan déformé sur le plan d'origine. La transformation inverse n'est pas une application.

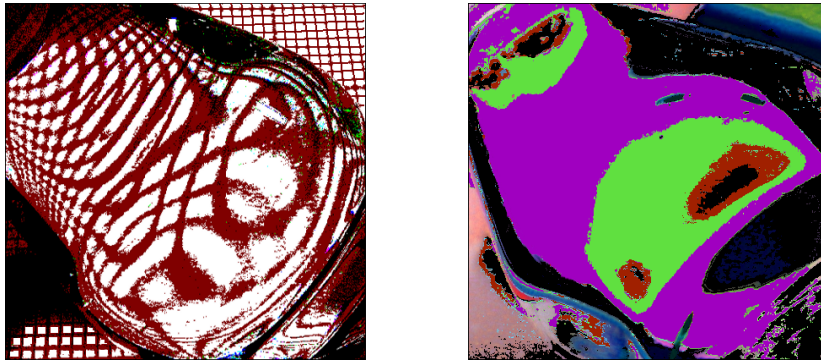


FIG. 9 – Photographies d'application surjective réalisée par réfraction optique (on a utilisé un pied de verre). A gauche : transformé d'un quadrillage cartésien; à droite; transformé du poulpe de la figure 2, avec duplication et boutonnières.

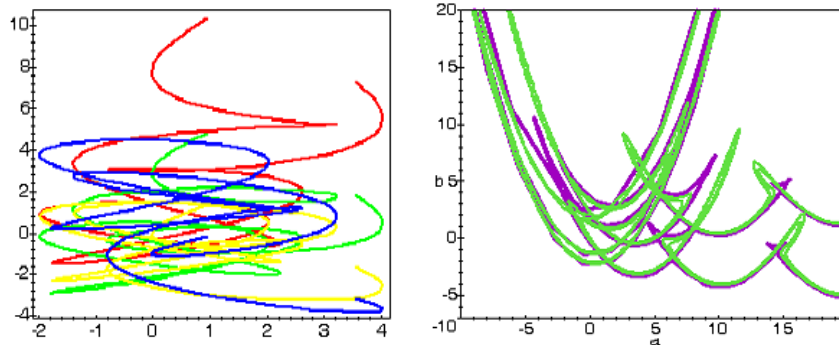


FIG. 10 – Analogues des figures 4 et 5, pour un potentiel arbitrairement perturbé : courbes  $(x, y)$  pour diverses valeurs de  $a$ , à  $b$  constant, à gauche; résultat quant au poulpe, à droite : on constate des ondulations et une démultiplication des points de rebroussement. Comparer avec les figures 6 et 7.

Qu'en est-il de l'ordre canonique des poulpes, défini par la suite standard unidimensionnelle de VERHULST ? Cet ordre existe encore pour une partie d'aire non nulle de la zone chaotique du plan  $(a, b)$  de la suite non perturbée de HÉNON, mais pour une partie seulement. Il existe probablement encore, de la même manière, pour les suites faiblement perturbées. Pour de fortes perturbations, il semble au contraire qu'il soit caduc pour la totalité de la zone de chaos. Ainsi cet ordre ne présente-t-il qu'une universalité très relative, valable seulement *pro parte* pour certaines suites "simples". Il resterait à préciser le sens de ce dernier terme.

## 2 La distinction entre poulpe et arbre est-elle toujours possible ?

### 2.1 Premier exemple : suite de Mandelbrot

Le déploiement unidimensionnel pur n'a lieu que sur l'axe du filament sagittal. En tout autre endroit de l'ensemble correspondant à une convergence vers un nombre fini de points, ces points ne sont pas alignés. Le long des lignes axiales des autres filaments, il y a déploiement unidimensionnel de chacun des points d'un polygone. Autrement dit, on ne parlera de déploiement purement unidimensionnel que sur les axes des filaments, soit sur des sous-ensembles de dimension 1. Sur chaque filament se réalise le chaos de manière non négligeable (sur une longueur non nulle).

Concernant les scénarios de sortie de l'ensemble pour aboutir à la divergence, la trajectoire régulière générique traverse un nombre infini dénombrable d'arbres et un nombre infini dénombrable de zones divergentes, de longueurs non nulles, avec un nombre infini non dénombrable de transitions, avant d'aboutir à la divergence définitive. La suite ainsi décrite n'est bien ordonnée dans aucun de ses deux sens, et elle ne possède pas de dernier élément. Les scénarios comprenant au moins deux déploiements successifs de polygones et / ou de polypôles, sans intermédiaire divergent, sont tous négligeables.

### 2.2 Second exemple : suite à deux dimensions non holonome

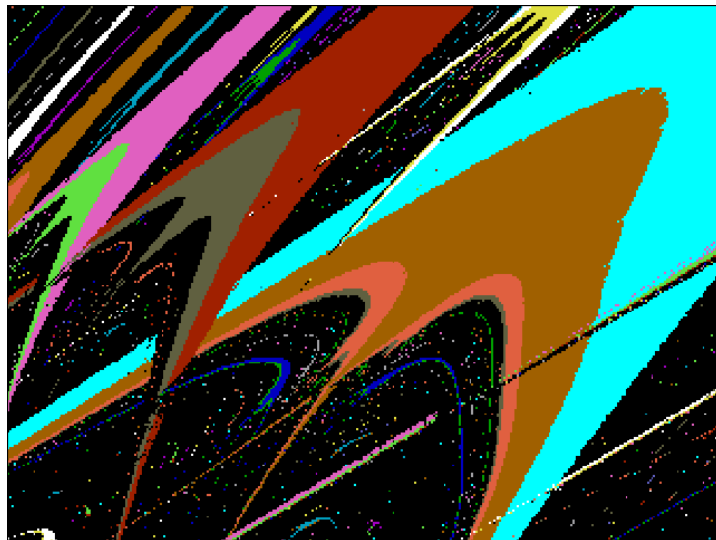


FIG. 11 – Formules  $S_2$  ; l'arbre le plus gros (son tronc en cyan clair) est d'ordre 59.

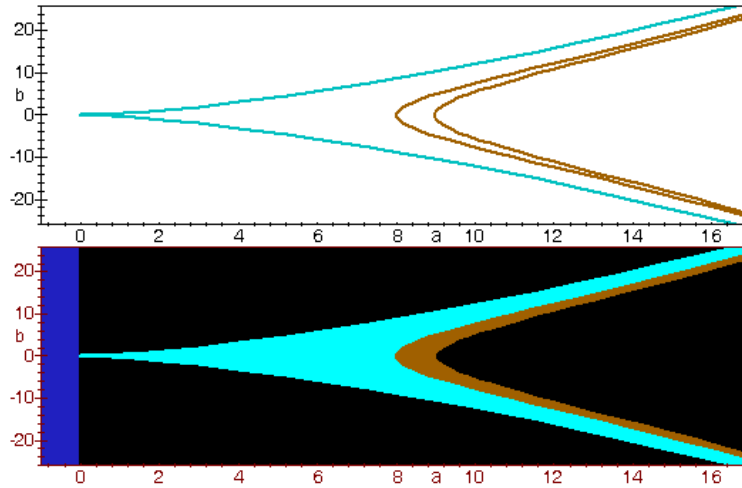


FIG. 12 – Arbre-poulpe simulé. En haut, les courbes ; en bas, l'arbre colorié pour un ordre égal à 59 ; le poulpe-source d'ordre 1 est représenté en bleu. Comparer avec l'original, figure 11.

Parmi les suites bidimensionnelles, nous avons choisi la suite  $S_2$  pour en exhiber quelques arbres particuliers, montrés sur la figure 11. Contrairement à d'autres arbres voisins, qui possèdent une frondaison avec une sous-forêt, ceux-ci se terminent par une entrée directe sur un poulpe, avec tous les sous-poulpes disposés comme autour d'un poulpe simple ordinaire. Au départ de l'arbre, au voisinage de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ , le déploiement est polygonal et régulier. Force est d'admettre que la déformation du polygone, lorsqu'on s'éloigne de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ , lui donne une forme de polypôle et qu'il s'inscrit, au niveau du sommet de l'arbre, dans un protocole complet de déploiement unidimensionnel. Autrement dit, la même trajectoire peut être plongée, soit dans un espace des phases tridimensionnel si on l'interprète comme relevant d'un polygone, soit dans un espace bidimensionnel replié, si on la range dans la catégorie *polypôle*. Le comportement au sommet d'un arbre relève, soit nettement de l'une des catégories, soit d'un mélange des deux. De même il existe des poulpes libres qui présentent une sous-forêt. La transition (directe ou inverse) polygone  $\leftrightarrow$  polypôle est dans tous les cas progressive, sans aucune solution de continuité. Le cas purement polygonal est une situation limite, à la frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ . Quant au cas polypolaire, il ne se décline à l'état pur que dans le cas d'une suite unidimensionnelle, ou d'une dégénérescence d'une suite pluridimensionnelle, comme par exemple pour  $(x_0 = 0, y_0 = 0, b = 0)$  de la suite de MANDELBRÖT ou pour  $b = 0$  de la suite de HÉNON. Les situations pures n'occupent, dans le plan  $(a, b)$  que des sous-ensembles négligeables. Ces considérations sont étayées dans ce qui suit par quelques examens détaillés de déploiements.

Concernant la suite des poulpes qui peuplent la zone chaotique, il est clair qu'au sortir de la forêt figurée ici, l'ordre standard ne peut exister : en effet, l'ordre des arbres de la forêt est totalement différent. On trouve ici une autre limitation à l'universalité de l'ordre tiré de la formule de VERHULST. Plus précisément, dans la zone chaotique vont se superposer les poulpes issus des arbres et les poulpes "libres" analogues à ceux de la zone chaotique de HÉNON.

Est-il possible de retrouver, par des considérations catastrophistes, la forme d'un arbre-poulpe ? Il existe une courbe d'entrée, avec point de rebroussement, et une courbe de sortie partout régulière, qui est la courbe de contact avec le premier sous-poulpe. Dans leurs formes les plus simples, ces courbes admettent au maximum 3 points d'intersection avec une droite. L'idée est cette fois d'utiliser un potentiel cubique et de procéder ensuite par examen de points

de tangence comme au paragraphe 1.1. Il se trouve ici encore qu'aucun potentiel standard de THOM ne convient à cette étude. Nous utiliserons la forme suivante :

$$y(t, a) = t^3 - at + b. \quad (8)$$

puis le calcul s'effectue encore en résolvant le système  $\{y(t, a, b) = 0; \frac{\partial y}{\partial t}(t, a, b) = 0\}$  pour aboutir à la solution très simple :

$$a = 3t^2 \quad b = -2t^3. \quad (9)$$

La figure 12 montre le résultat, avec une courbe de sortie (en brun) estimée ici en donnant à la dérivée  $\frac{\partial y}{\partial t}$  la valeur  $-8$ . L'autre courbe en brun, obtenue en donnant à la dérivée la valeur  $-9$ , est censée représenter la sortie du premier sous-poulpe (cette dernière en réalité est plus compliquée à cause de l'existence d'une cascade de bifurcations).

### 2.3 Troisième exemple : suites à 3 et 4 dimensions

Les formules de la suite à 3 dimensions et 2 paramètres  $S_4$  (voir page 22) sont conçues pour que, à l'évidence, la divergence soit interdite. On observe dans le plan  $(a, b)$  des paramètres, des poulpes complets entourés d'un océan chaotique : figure 13. Les poulpes sont bordés par des franges correspondant à des cascades de bifurcations, ou bien par des forêts fractales. La figure 14 montre l'une de ces forêts. On remarque des arbres racinés, et aussi des arbres à 2 frondaisons, sans racine : le paramètre angulaire sur la frontière du poulpe générateur présente un extremum. On remarque aussi les terminaisons en forme de poulpes des arbres visibles. La panoplie des formes ne montre pas de nouveauté par rapport aux suites à 2 dimensions, les déploiements sont tous ressortissants de types déjà connus.

Un exemple de suite à 4 dimensions et 2 paramètres, avec la suite  $S_5$ . Les formules autorisent cette fois la divergence. Sur la figure 15, la quasi intégralité de la zone convergente, avec le gros poulpe central d'ordre 1 et d'étroites régions chaotiques en lisière. Le diagramme à cette échelle ressemble à celui des suites anholonomes à 2 dimensions déjà étudiées. Sur la figure 16, détail du bord droit de la zone d'ordre 3 : forêt fractale avec des arbres à frondaisons différentes de poulpes, analogues aux formes observées couramment dans le cas des suites à 2 dimensions. La figure 17 montre une autre forêt, cette fois sur le bord supérieur de la même zone : tous les arbres se terminent en poulpes. Enfin, un détail du sommet de cette dernière forêt sur la figure 18 : les poulpes  $y$  sont ordonnés selon l'ordre des polygones. On constate que les hauteurs des arbres tendent vers une limite non nulle lorsque leur ordre tend vers l'infini, comme pour les suites anholonomes à 2 dimensions. Des poulpes libres de forme canonique sont visibles également sur cette image. Finalement, toutes les structures reconnaissables existent déjà en dimension 2 et toutes les structures existant en dimension 2 se retrouvent dans cet exemple. L'accroissement de la dimension au-dessus de 2 semble bien n'apporter rien de nouveau, ni retrancher aucune possibilité. Ceci correspond bien au paradigme selon lequel existent 2, et seulement 2 types fondamentaux de déploiement, polypolaire et polygonal.

### 2.4 Restrictions à l'universalité des suites de poulpes

La suite de poulpes canonique définie par la suite de VERHULST n'apparaît finalement à l'état pur que dans un ensemble de suites certes non négligeable, mais en tout cas petit, si tant est que ces termes aient un sens précis dans le cas d'un ensemble de fonctions, même en se restreignant aux fonctions continues et différentiables une infinité de fois. Aucune autre suite standard de poulpes ne semble pouvoir être dégagée à partir d'autres formules ; ce dernier

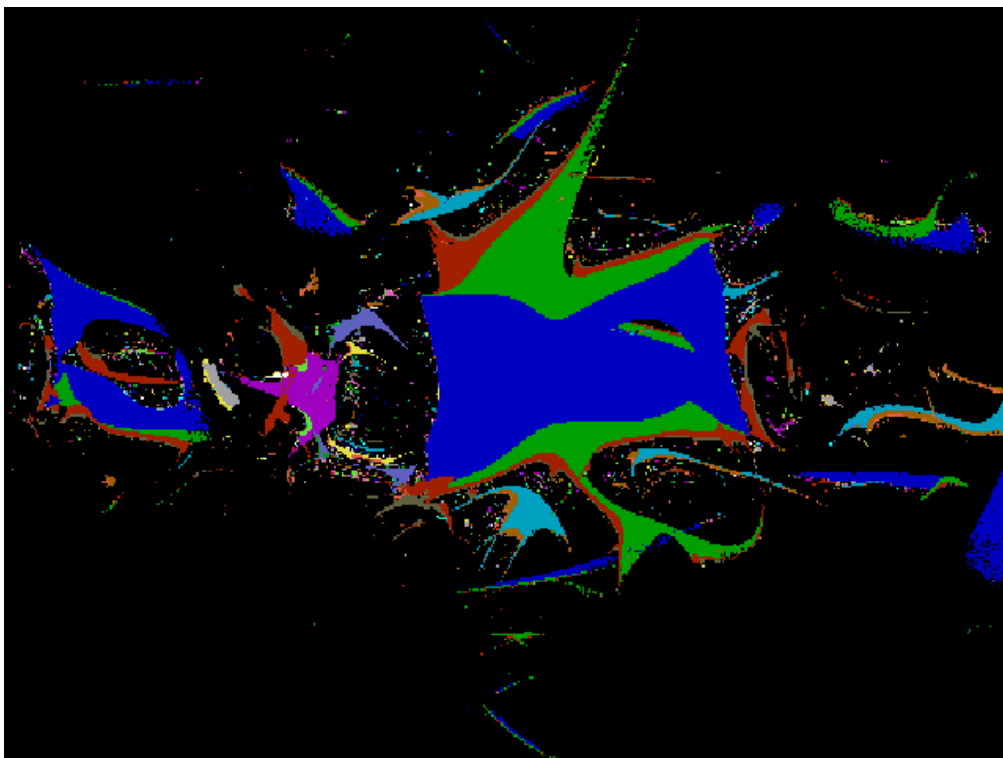


FIG. 13 – Suite  $S_4$  : pas de divergence. Les formes des poulpes sont compliquées par la présence de fonctions sinusoidales dans les formules. Tailles des poulpes diminuant exponentiellement avec l'ordre.

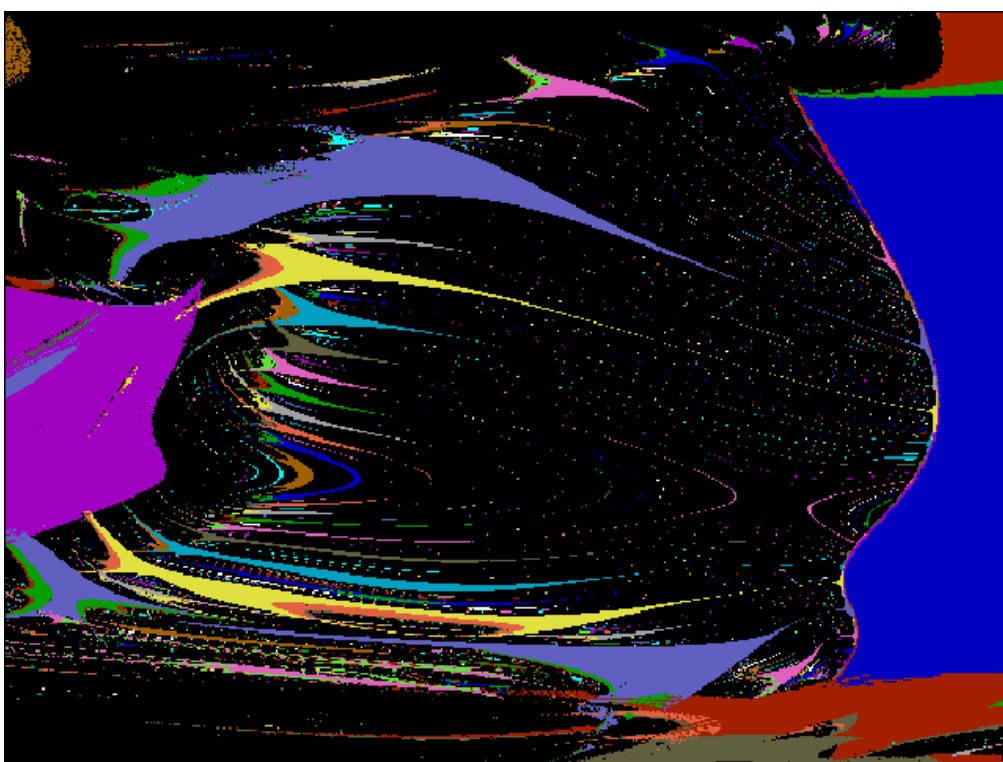


FIG. 14 – Détail de la forêt apparaissant dans la partie gauche de la figure 13. Remarquer le point-col dans la forêt, les duplications, boutonnières... vus dans le paragraphe précédent.

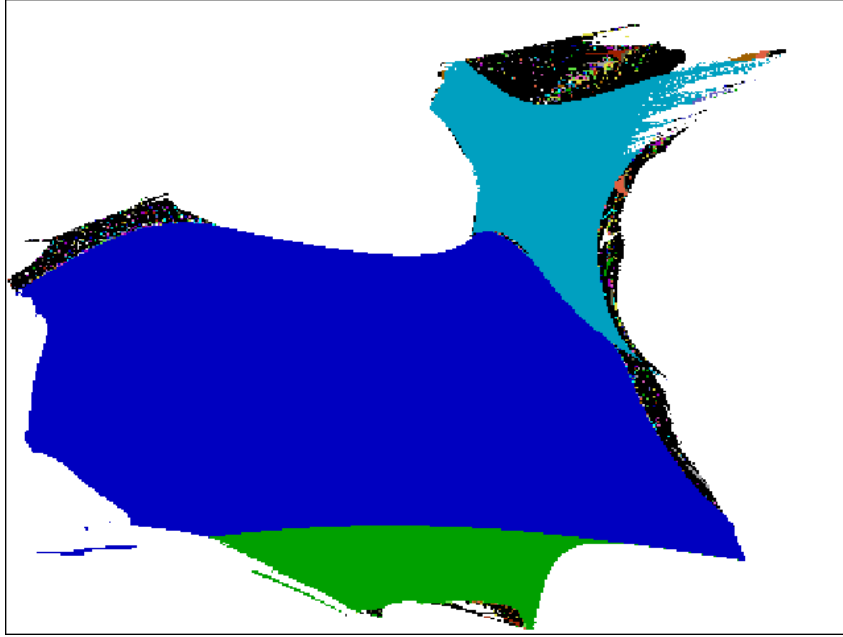


FIG. 15 – Suite  $S_5$ , à 4 dimensions. Vue générale de la zone convergente du plan  $(a, b)$ . Poulpe d'ordre 1 en bleu et sa première bifurcation, ordre 2 en vert, en bas de la figure. Arbre (ou poulpe) d'ordre 3 en cyan foncé, en haut de la figure. On distingue des forêts fractales dans les zones marginales chaotiques.

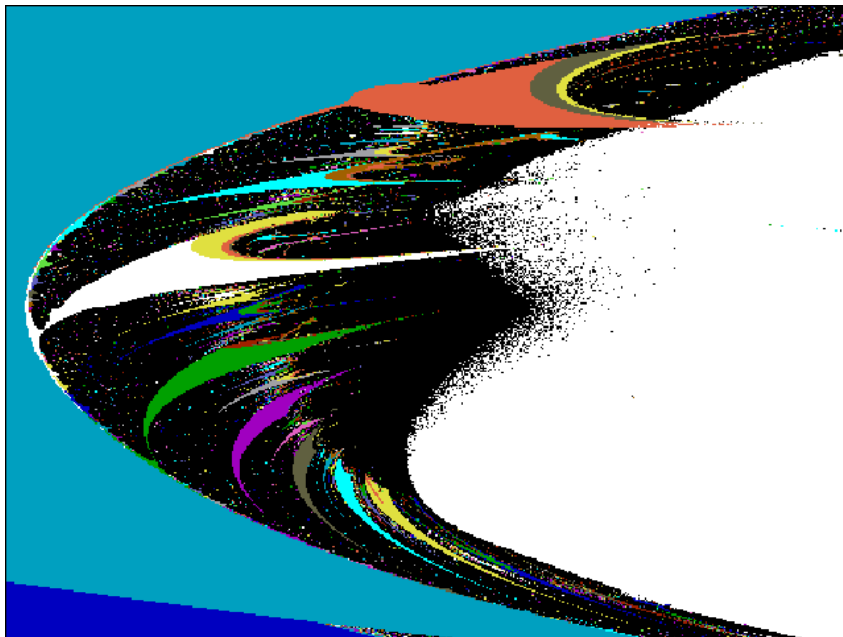


FIG. 16 – Agrandissement de la forêt  $F_3$  située à droite de la zone d'ordre 3 visible sur la figure 15. Les arbres se terminent seulement partiellement en cascades de bifurcations et aucun de ceux qui sont visibles n'exhibe les antennes caractéristiques d'une terminaison en poulpe. Les racines étalées au voisinage de la zone-source d'ordre 3 sont des artefacts provenant du nombre fini d'itérations calculées.

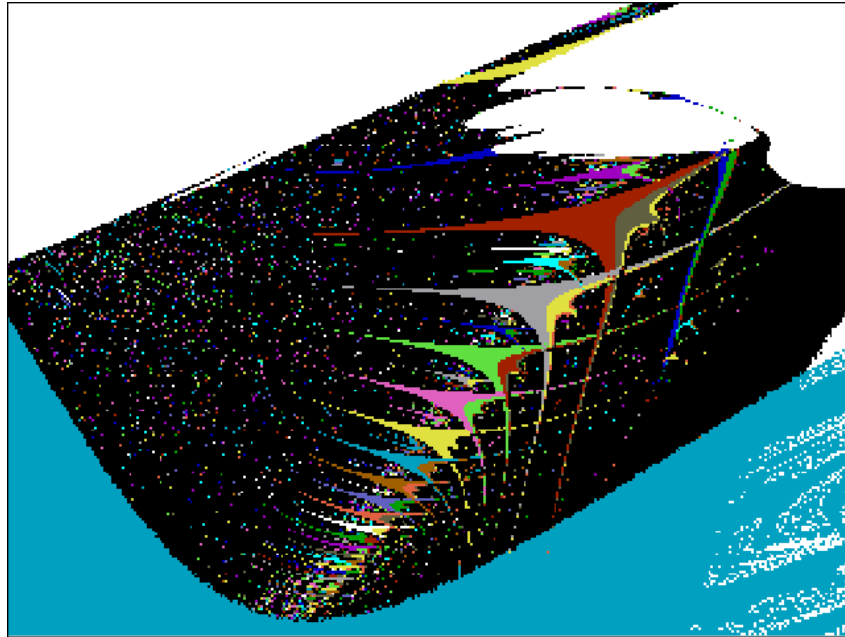


FIG. 17 – Forêt de la partie supérieure de la région d'ordre 3 de la figure 15. Tous les arbres visibles (et probablement tous les arbres) se terminent en poulpes. Leurs racines semblent se perdre dans la zone de divergence. Les sommets des arbres en haut (gros arbres bleu et jaune) sont également "mangés" par la divergence.

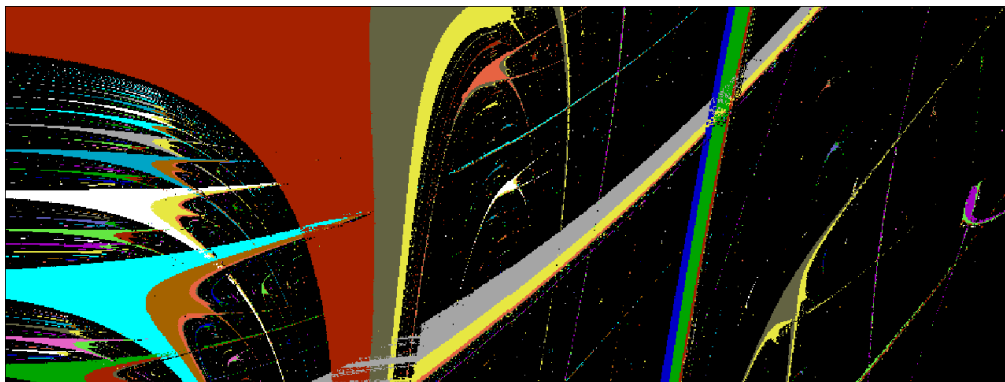


FIG. 18 – Agrandissement d'une partie de la forêt de la figure 17. Remarquer la convergence vers une limite des extrémités des arbres. Sur la droite apparaît au moins un poulpe libre, indépendant des terminaisons de la forêt. L'ordre des poulpes est *a priori* un mélange d'ordre de polygones et d'ordre de polypôles. En tout cas, il diffère des ordres canoniques purs. On peut remarquer encore les intersections complexes entre les différents poulpes.

point reste cependant à éclaircir.

L'ordre des arbres d'une forêt semble quant à lui toujours gouverné par une abscisse le long de leur frontière-source, interprétable comme l'angle au sommet (ou comme l'angle au centre) caractérisant le polygone associé à chaque arbre ; cet ordre est beaucoup moins fragile que celui des poulpes.

### 3 Evolutions détaillées de polygones

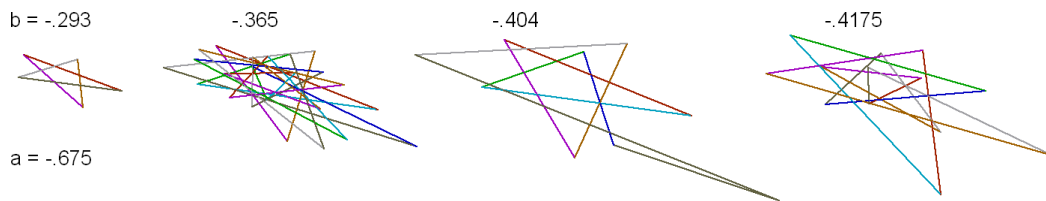


FIG. 19 – Suite  $S_2$ . Le tracé des segments des polygones permet de mieux appréhender les polygones de petits ordres. On constate au fur et à mesure de l'éloignement de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  des écarts de plus en plus marqués par rapport à la régularité. La distinction entre polygone et polypôle devient finalement caduque.

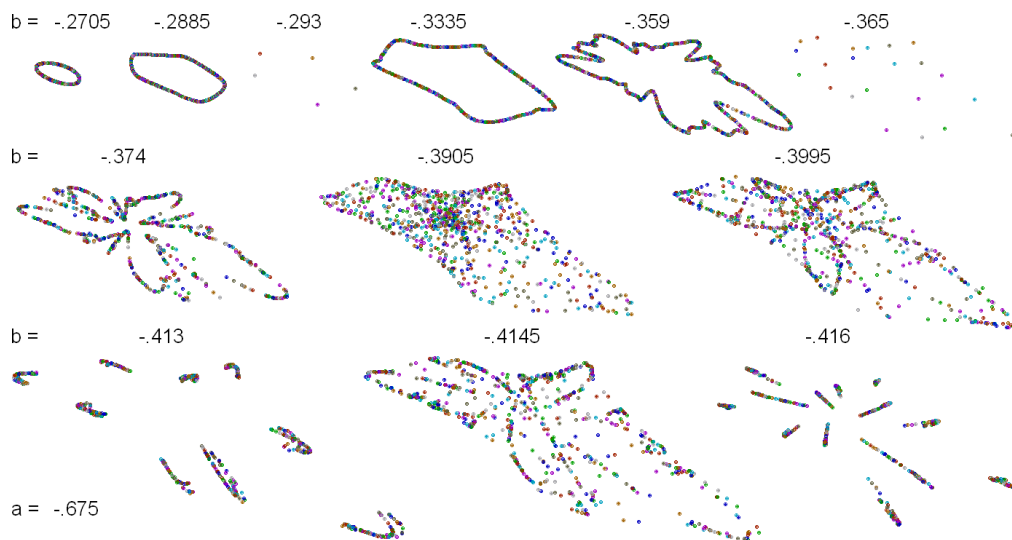


FIG. 20 – Suite  $S_2$  : série de polygones depuis la zone de convergence simple  $\mathcal{C}_{1(1)}$  jusque dans la zone chaotique qui suit la forêt fractale. Déformation de plus en plus marquée de la courbe circonscrite, depuis une ellipse au voisinage de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  jusqu'à des formes fractales. Remarquer les alignements de sommets de certains sous-polygones, davantage caractéristiques d'un déploiement polypolaire que d'un déploiement polygonal. Aucun type pur n'est cependant réalisé.

Les figures 19 et 20 montrent des polygones successifs obtenus à partir de la suite bidimensionnelle  $S_2$  lors d'une traversée de forêt fractale, depuis la sortie de la zone  $\mathcal{C}_{1(1)}$  jusqu'à la région chaotique  $\mathcal{C}_2$ . La représentation des segments des polygones permet de constater la dégradation progressive de leur régularité ; la représentation qui ne conserve que les sommets autorise, quant à elle, l'analyse qualitative de situations plus complexes, certaines non périodiques. Le début du déploiement est elliptique et on peut faire cette constatation pour n'importe quelle suite qui donne lieu à une forêt fractale. Autrement dit, au voisinage de la

frontière de  $\mathcal{C}_{1(1)}$  la trajectoire dans l'espace des phases de dimension 3 est inscrite sur un tore, éclatement de la trajectoire unibouclée de la zone  $\mathcal{C}_{1(1)}$ . Pour rendre compte des sections de POINCARÉ figurées, on ne peut conserver cette notion de tore simple. La surface pourrait dans un premier temps conserver sa topologie en se déformant mais ceci n'est plus concevable au-delà de la deuxième section de la figure 19 (sixième section sur la figure 20). Le déploiement cesse donc d'être purement polygonal pour acquérir une caractéristique du déploiement polypolaire : une surface d'inscription repliée de façon compliquée, fractale dans le cas non périodique (alors que dans le cas apériodique polygonal, la surface reste un tore). La question peut alors se poser de délimiter dans le plan  $(a, b)$  la région dans laquelle les sections peuvent toujours être considérées comme polygonales; on peut tenter de répondre en première instance que cette région inclut les troncs de tous les arbres, toutefois ceci n'est qu'une hypothèse qu'il faudrait explorer expérimentalement en détail. La question annexe, à laquelle il faudrait répondre simultanément, est de savoir distinguer entre une section qui doit s'inscrire sur une surface homéomorphe à un tore, et une qui ne le doit pas. Une telle distinction n'est pas possible dans tous les cas, par exemple on peut toujours représenter sur une surface torique les courbes  $2^n$ -bouclées qui apparaissent au sein d'une cascade de FEIGENBAUM indépendamment du fait qu'une telle représentation n'a aucun intérêt effectif.

## 4 Examen de quelques suites à 10 dimensions

### 4.1 Poulpes et arbres

Nous proposons pour une exploration préliminaire de suites de dimension quelque peu élevée, pour commencer 3 suites à 10 dimensions, étiquetées  $S_6$  (convergente ou divergente),  $S_7$  et  $S_8$  (toujours convergentes par construction). Voir les formules au paragraphe 6.2, page 23.

Les figures 21 et 22 sont relatives à  $S_6$ . On constate, dans le cas de  $S_6$ , une structure en apparence assez sauvage de la frontière entre la zone de convergence  $\mathcal{C}$  et la zone de divergence  $\mathcal{D}$ , qu'il conviendrait de préciser dans un travail plus approfondi. Sur la vue de détail, des structures connues sont identifiables, à l'exclusion de tout aspect nouveau : poulpes et arbres; cascades de bifurcations. Le tout très déformé par rapport à ce qui était habituel dans le cas des suites bidimensionnées de formulations simples.

Lorsque la convergence des suites est forcée, suites  $S_7$  et  $S_8$ , figures 23 à 26, les mêmes types de structures continuent de se manifester, libres maintenant du voile de divergence. Les formes des poulpes ne sont plus ressemblantes de la forme canonique; les arbres des forêts fractales quant à eux peuvent se terminer apparemment sans frondaison en se noyant directement dans le chaos. Mis à part ces détails morphologiques, rien de nouveau encore n'apparaît par rapport aux suites à 2 dimensions étudiées tout à l'heure.

### 4.2 Structures initiale et développées des déploiements

Il convient de préciser ce que nous entendons par l'absence de nouveauté lorsqu'on passe de la dimension 2 à la dimension 10. Est-il certain qu'aucun autre type de déploiement que les deux étudiés jusqu'à présent ne se manifeste? Les polygones ou polypôles en dimension 10 peuvent-ils être considérés comme analogues de ceux observés précédemment (paragraphe 3, page 14) en dimension 2? La figure 27 est l'analogie en dimension 10 de la traversée centrifuge d'une forêt fractale représentée sur la figure 20 dans un cas bidimensionnel; plus précisément, c'est l'analogie de la première ligne de cette figure 20. La courbe enveloppe

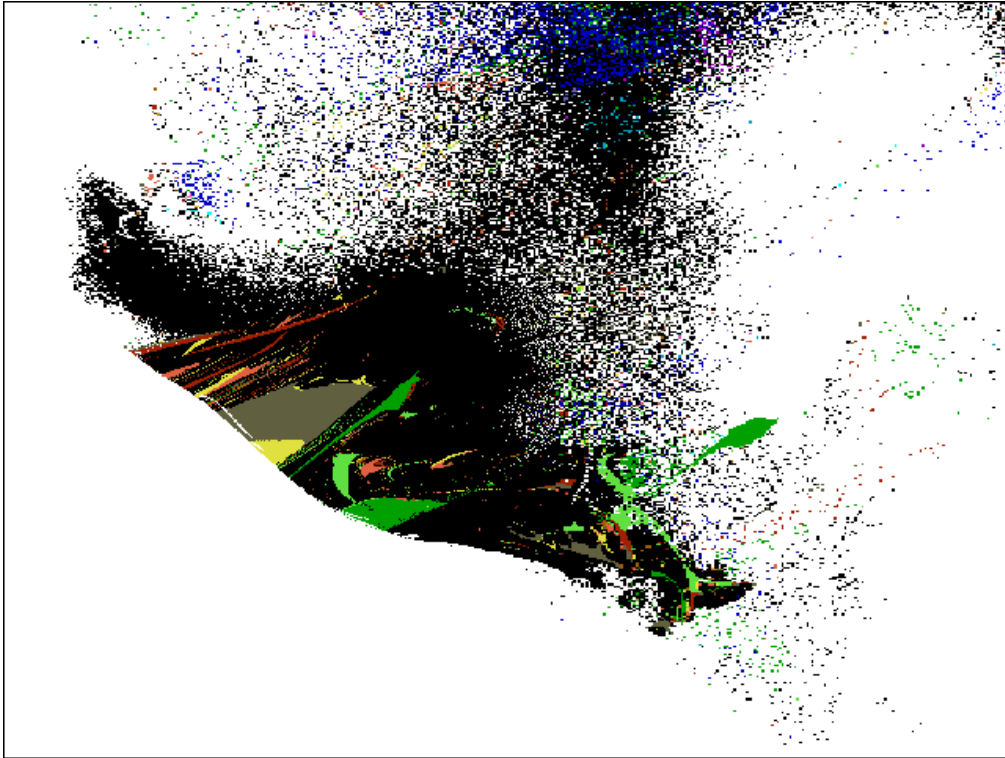


FIG. 21 – Suite  $S_6$  : vue à échelle moyenne du plan des paramètres. Noter la frontière compliquée entre les zones convergente et divergente. Remarquer aussi le domaine  $\mathcal{C}_{1(2)}$  qui pénètre dans la zone divergente, à droite.

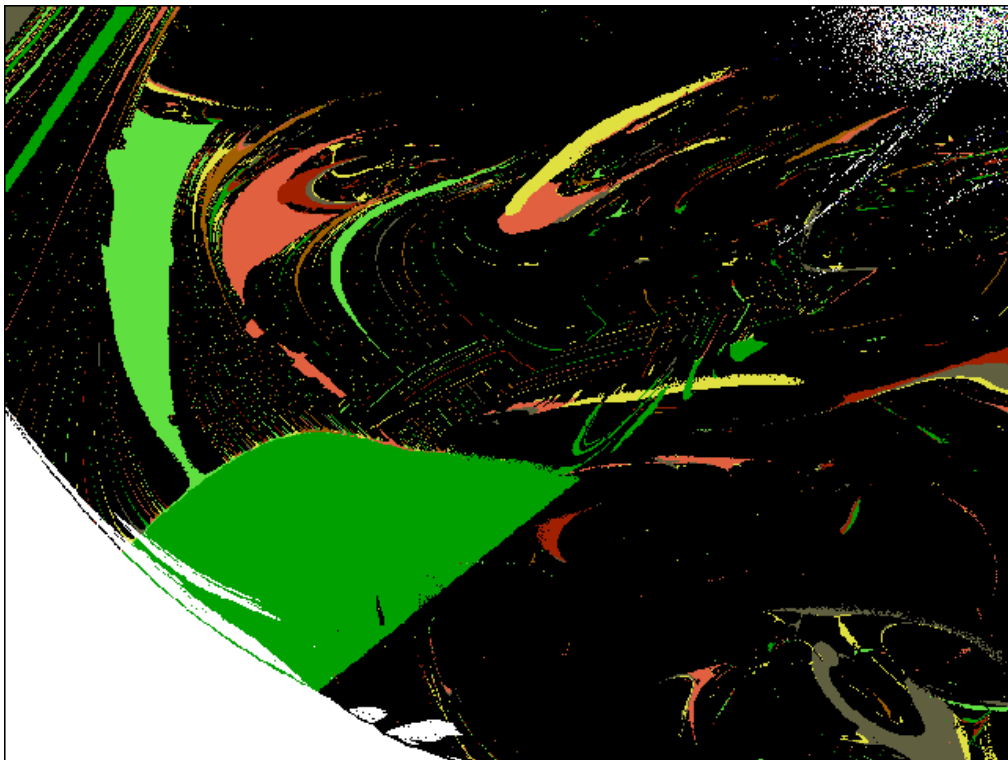


FIG. 22 – Suite  $S_6$ . On voit un détail de la figure 21, avec poules, cascades de bifurcations et forêts fractales.

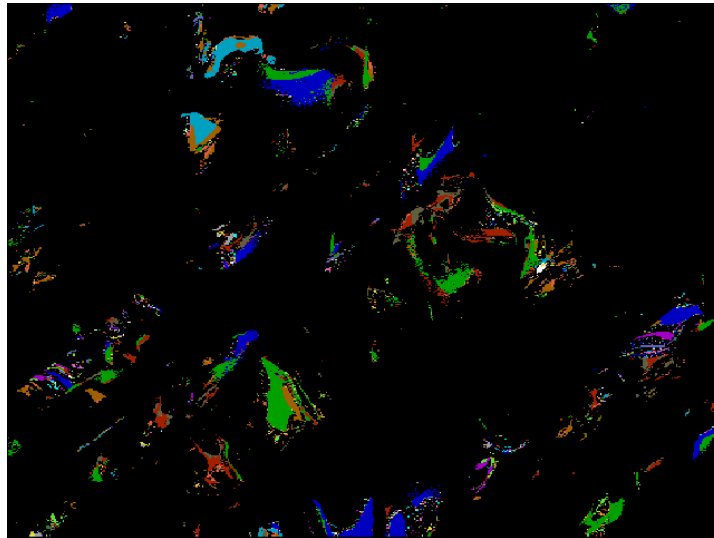


FIG. 23 – Suite  $S_7$ , plan de MANDELBROT à grande échelle. La structure est en poulpes isolés au milieu d'un océan chaotique. Les ordres dominants au sein des poulpes sont 1, 2 et 4 (bleu, vert, rouge respectivement) ainsi que 3 et 6 (cyan et brun).

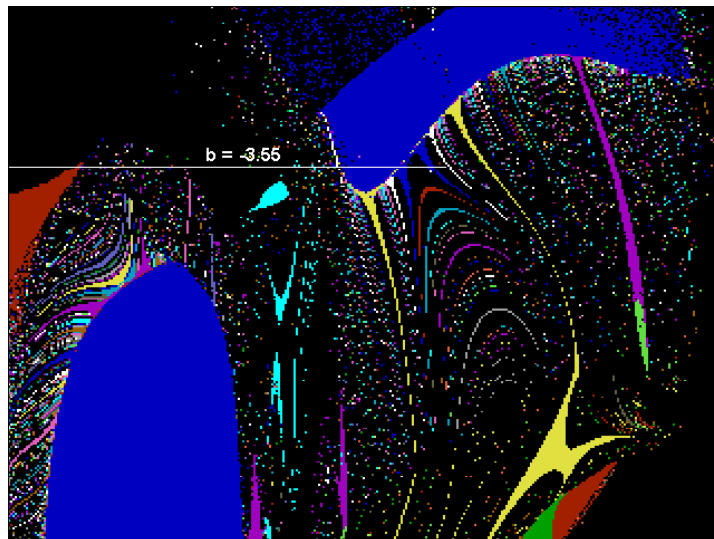


FIG. 24 – Suite  $S_7$ . Détail de la région en bas au milieu de la figure 23. Poulpes d'ordre 1 sans cascade de bifurcations, forêts fractales racinées mais absence apparente de frondaison au sommet des arbres. Le paramètre  $a$ , en abscisses, varie de 0.26 à 0.9; le paramètre  $b$ , en ordonnées, varie de  $-4$  à  $-3.36$ . Le segment blanc  $b = -3.55$ , est celui sur lequel ont été choisies les sections présentées en figure 28.

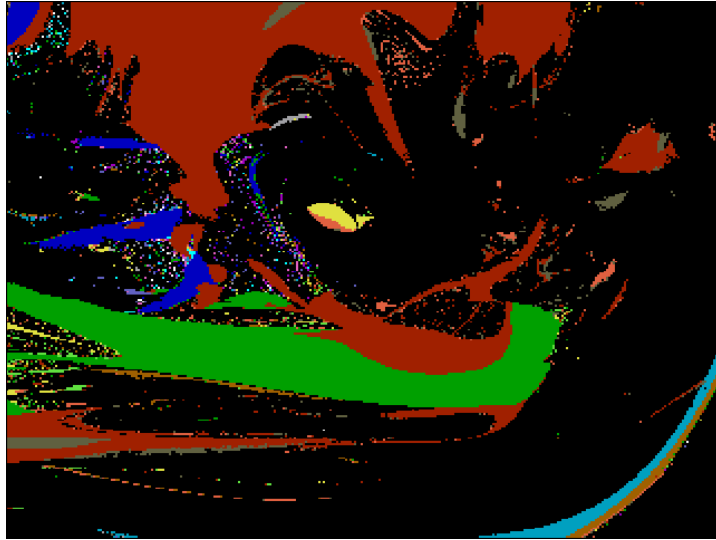


FIG. 25 – Suite  $S_8$ . Poulpes, la plupart sans sortie bifurcatoire complète. Seul le poulpe d'ordre 3, en bas à droite, présente une cascade de bifurcations standard. Les forêts ne sont pas distinctes à cette échelle. Voir la figure 26 pour le détail.

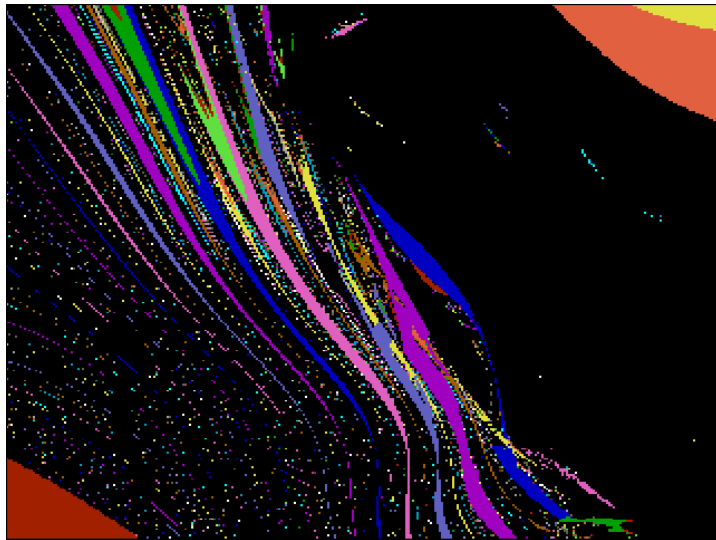


FIG. 26 – Suite  $S_8$ . Détail de la forêt située au centre sur la figure 25. On distingue les frondaisons de quelques arbres, avec cascades de bifurcations.

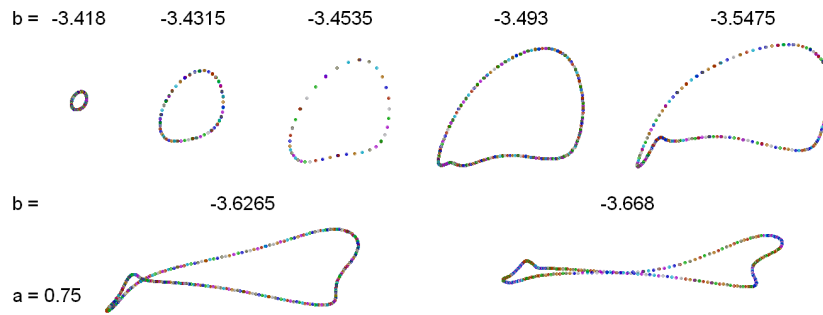


FIG. 27 – Suite  $S_7$  : sections de POINCARÉ, toutes périodiques, projetées dans le plan  $(f, y)$ . Le paramètre  $a$  est égal à 0.75. Le système traverse une forêt fractale pour tout l'intervalle des valeurs de  $b$  considérées. L'ellipse initiale se déforme progressivement. Les projections sur tous les plans de coordonnées se comportent de la même façon, avec une courbe limite elliptique au départ de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ .

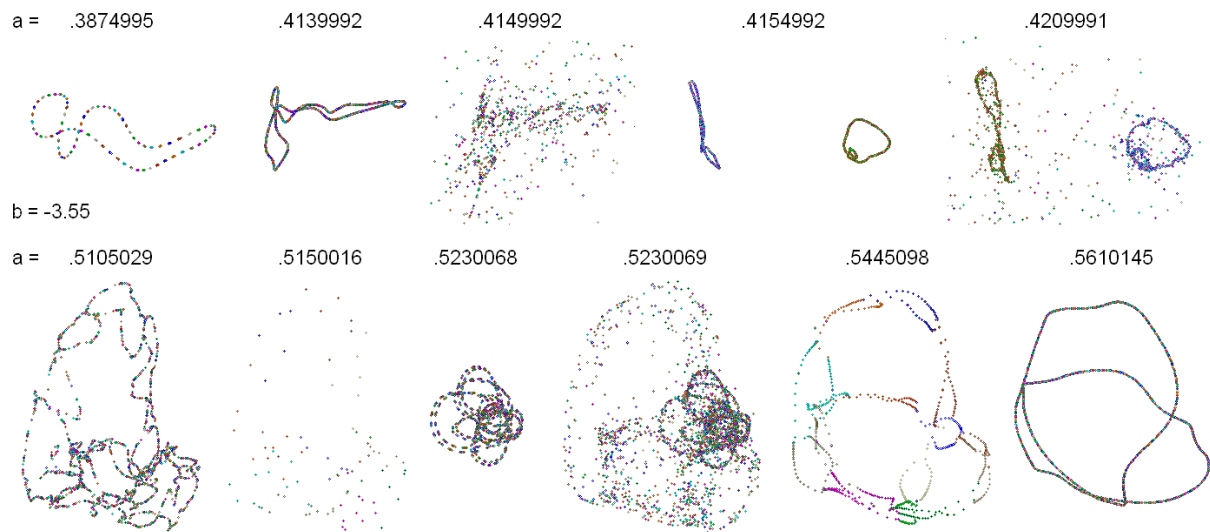


FIG. 28 – Suite  $S_7$ ; sections de POINCARÉ successives le long d'une droite  $b = -3.55$ , pour différentes valeurs de  $a$  (voir figure 24). Coordonnées  $x$  en abscisses,  $y$  en ordonnées. Il existe aussi, dans les zones chaotiques éloignées des arbres, des sections dont la répartition des points est pseudo-aléatoire (non représentées sur cette figure). Remarquer la grande variété des attracteurs; on peut en distinguer sur la figure 4 classes principales.

maintenant se recoupe, ce qui est normal puisqu'on projette maintenant une courbe gauche de  $\mathbb{R}^{10}$  sur un plan. Ceci mis à part, l'évolution est comparable, à partir, et c'est là le point le plus important, d'une ellipse au voisinage du poulpe-source. Toutes les projections sur les différents plans de 2 variables de cette évolution (même trajectoire dans le plan  $(a, b)$ ) ont donné toujours ce résultat : la forme asymptotique de la courbe enveloppe est une ellipse au voisinage de  $\mathcal{C}_{1(1)}$ . La forme asymptotique du déploiement dans  $\mathbb{R}^{10}$  est donc une courbe plane, et c'est une ellipse. L'observation expérimentale exclut ainsi toute autre possibilité de déploiement qu'une évolution polygonale ou polypolaire.

La figure 28 montre quelques-unes des sections obtenues sur la trajectoire représentée en figure 24. Il s'agit d'une traversée dans la région de transition entre une forêt et une zone chaotique. Il apparaît parfois un chaos développé (non représenté sur la figure) où les points possèdent une répartition à première vue pseudo-aléatoire. Pour d'autres valeurs de l'abscisse le long du trajet, apparaissent des polygones / polypôles, ou bien un chaos plus ou moins

réglé, dans lequel transparaissent sous forme de fantômes les contours de sections périodiques voisines (intermittences). Le fait le plus remarquable, et qui est ici nouveau par rapport aux plus petites dimensions, est la grande variété des schémas d'attracteurs et leur intrication complexe. Il n'est pas certain d'ailleurs que tous les schémas de la figure 28 représentent correctement la réalité mathématique. Certains peuvent être des artefacts, surtout lorsque le système semble hésiter entre un comportement périodique et un comportement chaotique, ou entre deux schémas d'attracteurs. L'ordinateur utilise 20 chiffres significatifs, ce n'est pas une infinité. La sensibilité aux erreurs d'arrondis est de toute manière très grande, ainsi que la sensibilité aux valeurs initiales des variables, en outre de la sensibilité aux valeurs des paramètres  $a$  et  $b$ . Il conviendrait à ce sujet d'explorer les frontières entre bassins d'attraction dans un portrait de JULIA ( $a$  et  $b$  fixés, valeurs initiales des variables comme coordonnées).

## 5 Aperçu rapide de suites de dimension 100

Quels problèmes expérimentaux nouveaux vont-ils se poser lorsqu'on multiplie encore par 10 le nombre de dimensions? Il devient clair, pour  $d = 100$ , que le programme doit lui-même pouvoir écrire différentes formules de base pour la suite. Un cadre doit lui être fourni, lui donnant une plus ou moins grande latitude de choix. Il est nécessaire aussi d'éviter d'aller à la pêche à la convergence : les formules doivent forcer cette dernière dans tous les cas, par l'emploi de fonctions bornées par exemple. Ce souci de rester borné est aussi une nécessité pour les applications possibles en physique, par exemple en mécanique des points ou des ensembles de solides, ou en mécanique des fluides. Le choix s'est porté ici sur des formules constituées d'un produit de  $f$  facteurs sinusoïdaux dépendant chacun d'une seule variable, additionné de deux termes proportionnels l'un à  $a$ , l'autre à  $b$ . avec choix possibles du nombre de dimensions  $d$ , du nombre  $f$ , d'un facteur constant différent  $k_p$  ( $p = 1$  à 100) pour chaque formule, de pulsations différentes  $c_p^j$  ( $p = 1$  à 100,  $j = 1$  à  $f$ ) dans chaque facteur sinusoïdal, des coefficients  $n_p$  et  $n'_p$  de  $a$  et de  $b$  respectivement. Il convient aussi de s'assurer que la suite ne se scinde pas en plusieurs sous-suites; plutôt que de le vérifier *a posteriori*, nous avons préféré l'imposer au départ par un choix approprié du premier facteur sinusoïdal, au prix d'une légère restriction de la variété des formules possibles. Le programme est présenté *in extenso* au paragraphe 6.3, page 23, sous le paramétrage qui fournit la figure 30. Il ne s'agit que d'une ébauche d'étude. Pour varier les formules, on active l'option INITIALISE, ce qui fait démarrer le générateur de nombres pseudo-aléatoires en un point déterminé par l'heure (avec minutes et secondes). Le programme doit alors être complété pour récupérer les valeurs de toutes les nouvelles constantes engendrées, les réutiliser si nécessaire, etc. Ces procédures routinières ne sont pas présentées ici. Le programme utilise deux macros notées COEFF et PULSE, qui représentent deux nombres  $k_0$  et  $c_0$  auxquels sont proportionnelles respectivement toutes les constantes  $k_p$  et les coefficients constants  $c_p^j$ .

Quels sont les résultats? On constate au premier abord la sensibilité du comportement aux valeurs de  $k_0$  essentiellement, de  $c_0$  accessoirement. Lorsque  $k_0$  augmente depuis la valeur 0, on constate successivement : une convergence systématique vers un point, pour toute valeur de  $a$  ou  $b$ ; un comportement avec convergence ou chaos comme observé couramment en dimensions inférieures; un comportement en apparence partout chaotique. La plage des valeurs de  $k_0$  donnant lieu au second comportement est assez restreinte. Finalement, il conviendrait de propulser le nombre  $k_0$  au rang de paramètre, en vue d'obtenir un portrait plus complet du système. Si l'on fait une analogie avec un système physique fluide (écoulement dans une conduite, autour d'une aile, etc.),  $k_0$  sera le paramètre de commande principal, à savoir ici le



FIG. 29 – Suite à 100 dimensions et 2 paramètres, plan  $(a, b)$  des paramètres. Programme S\_COS.C (initialisation standard indiquée en paragraphe 6.3). Poulpes (ordres 4 en rouge et 12 en rose principalement ici) avec cascades de bifurcations et forêts. Le poulpe d'ordre 12 avec ses quatre prolongements, présente l'aspect tout à fait classique étudié au paragraphe 1.1 (page 2). Voir figure 30 pour le détail d'une forêt.

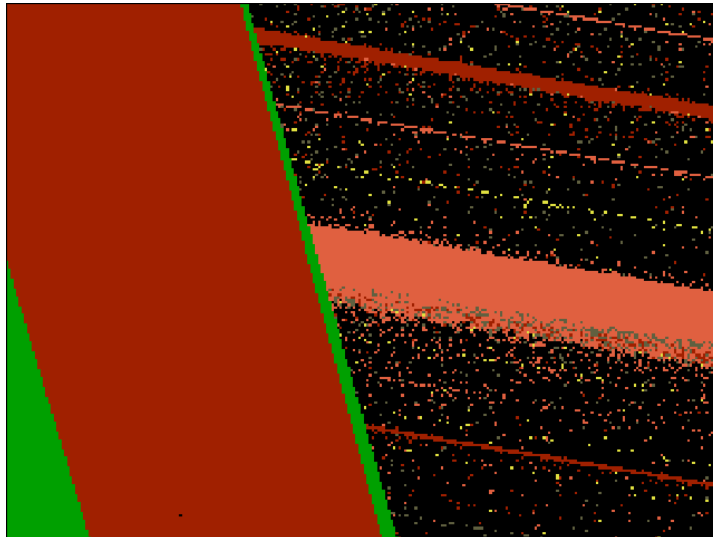


FIG. 30 – Suite à 100 dimensions, détail de la figure 29. Structure en forêt  $F_4$  non racinée.

nombre de REYNOLDS, tandis que  $a$ ,  $b$  et d'autres paramètres analogues seront les paramètres secondaires (facteurs de forme de la conduite, etc.).

$k_0$  ayant été fixé à une valeur intéressante, deux résultats sont montrés sur les figures 29 et 30. La constatation essentielle est qu'il n'y a pas beaucoup de nouveauté, on reconnaît même un poulpe quadrifide canonique, à peine déformé. A signaler un effet de masque marqué : par exemple le morceau de forêt visible en figure 30 est tronqué par le poulpe en bas à gauche.

## 6 formules et programmes

### 6.1 Formules des suites de dimensions 2, 3 et 4

Les suites de HÉNON répondent aux formules d'itération :

$$H \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - a \cdot x_n^2 \\ y_{n+1} &= b \cdot x_n \end{aligned}$$

et les suites de HÉNON perturbées :

$$HP_h \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - a \cdot x_n^2 \\ y_{n+1} &= b \cdot x_n + h \cdot \sin [50(y_n + 1 - a \cdot x_n^2)] \end{aligned}$$

où  $h$  est la constante caractérisant la perturbation sinusoïdale.

Suites de MANDELBROT :

$$M \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} &= 2x_n \cdot y_n + b \end{aligned}$$

Suites originales :

$$S_2 \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \exp x_n \cdot \sin y_n + x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} &= \exp x_n \cdot \sin y_n + 2x_n \cdot y_n + b \end{aligned}$$

$$S_3 \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^3 - 3x_n \cdot y_n^2 + y_n + a \\ y_{n+1} &= 3x_n^2 \cdot y_n - y_n^3 + x_n + b \end{aligned}$$

$$S_4 \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \sin y_n + 1 - a \cdot \sin(x_n^2) \\ y_{n+1} &= b \cdot \sin x_n \cdot \sin z_n \\ z_{n+1} &= \sin x_n + \sin y_n \end{aligned}$$

$$S_5 \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - a \cdot x_n \cdot t_n \\ y_{n+1} &= b \cdot x_n \cdot z_n \\ z_{n+1} &= x_n - y_n \\ t_{n+1} &= a + y_n - z_n \end{aligned}$$

## 6.2 Formules des suites à 10 dimensions

Formules  $S_6$  : convergentes / divergentes

```

1 X = sin (y) - 0.5 * m - a ;
2 Y = sin (y) - 2 * cos (h + y + b) ;
3 Z = sin (x) + sin (f - g + a + b) ;
4 F = sin (f) - sin (z + m) ;
5 G = - cos (m) + sin (n + x + f) ;
6 H = x + 0.547821 * q - a ;
7 M = cos (n - p - a * b) ;
8 N = sin (m - p + g + a) ;
9 P = p - z ;
10 Q = p + b ;

```

Formules  $S_7$  : convergentes

```

1 X = sin (y) - 0.5 * cos (m) - a ;
2 Y = sin (y) - 2 * cos (h + y + b) ;
3 Z = sin (3.14159265358979323846 * x) + sin (f - g + a + b) ;
4 F = sin (f) - sin (z + m) ;
5 G = - cos (m) + sin (n + x + f) ;
6 H = sin (x + 0.547821 * q) - a ;
7 M = cos (n - 3.14159265358979323846 * p - a * b) ;
8 N = sin (m - p + 1.2650174 * g + a) ;
9 P = sin (0.23541802 * p - z) ;
10 Q = cos (2.5224433 * p) + b ;

```

*Nota bene* : 3.14159265358979323846 n'est pas égal à  $\pi$ .

Formules  $S_8$  : convergentes

```

1 X = 0.214 * cos (y) * cos (3.0 * z) - a ;
2 Y = cos (0.25 * z) * cos (1.00 * n) * cos (1.001 * f) + b ;
3 Z = 2.1 * cos (3.0 * f) * cos (1.0 * g) + a + b ;
4 F = 0.278 * cos (3.00 * g) * cos (3.0 * m) ;
5 G = -1.02 * cos (h) * cos (3.00 * n) ;
6 H = -1.25 * cos (0.547821 * m) * cos (3.00 * y) - a ;
7 M = -0.234 * cos (2.0 * n) * cos (2.0 * p) - a ;
8 N = 2.0 * cos (3.0 * p) * cos (3.00 * m) + 1.2650174 + a ;
9 P = cos (0.23541802 * q) * cos (3.00 * p) * cos (2.0 * q) ;
10 Q = -0.385 * cos (2.5224433 * x) * cos (0.300 * h) - b ;

```

## 6.3 Etude de suites à 100 dimensions : proposition de programme

Les suites étudiées doivent être assurées de la convergence, ceci afin d'éviter de perdre du temps à tâtonner, et aussi pour se rapprocher des systèmes physiques qui, quant à eux ne présentent jamais d'analogue de la divergence mathématique. Il convient aussi pour une implémentation sur micro-ordinateur, que des calculs peu entachés d'artefacts ne soient pas trop longs (une heure au maximum pour une figure est une limite acceptable). Le programme proposé emploie des formules du type :

$$X_p = k_p \cdot \prod_{j=1}^f \cos \left( c_p^j \cdot x_{m_p^j} \right) + n_p \cdot a + n'_p \cdot b \quad (10)$$

où  $a$  et  $b$  sont les deux paramètres, le vecteur  $x_p$ , avec  $p = 1$  à 100 est l'ancien vecteur,  $X_p$  est le nouveau vecteur,  $f$  avec  $f \geq 2$  le nombre de facteurs en  $\cos$  de la formule,  $k_p$ ,  $n_p$ ,  $n'_p$  des vecteurs constants,  $c_p^j$  et  $m_p^j$  deux matrices  $100 \times f$  constantes, tous déterminés au début du programme. La durée d'exécution est en gros proportionnelle à  $f$ . Dans le programme, la

dimension  $d$  et le nombre de facteurs  $f$  sont ajustables : macros DIM et FAC.

La formule précédente peut encore s'écrire sous la forme plus simple :

$$X_p = k_p \cdot \prod_{j=1}^{100} \cos(\omega_p^j \cdot x_j) + n_p \cdot a + n'_p \cdot b \quad (11)$$

où la matrice  $\omega_p^j$  est cette fois une matrice carrée  $100 \times 100$ , dont  $100(100 - f)$  coefficients au moins sont nuls. La formulation (10) a été préférée à (11) dans l'écriture du programme pour raisons de moindre encombrement en mémoire et de rapidité d'exécution. La matrice  $\omega_p^j$  ne doit pas être diagonale par blocs après permutation simultanée quelconque des lignes et des colonnes, faute de quoi la suite se scinderait en sous-suites. Cette condition est assurée par un choix particulier, par décalage constant, du premier des  $m_p^j$ , soit  $m_p^1$  pour chaque valeur de  $p$ .

---

```

1  /*
2   Programme S_COS.C
3   suites de dimensions quelconques
4   formules en produit de fonctions sinusoidales
5  */
6
7  #include <stdio.h>
8  #include <stdlib.h>
9  #include <graphics.h>
10 #include <math.h>
11 #include <dos.h>
12 #include <time.h>
13
14 /*#define INITIALISE*/
15
16 #define DIM 100
17 #define FAC 3
18 #define COEFF 0.028
19 #define PULSE 0.0148
20 #define A1 0.08
21 #define A2 0.16
22 #define B1 0
23 #define B2 0.08
24 #define DA 0.0003
25 #define DB 0.000375
26 #define TAMPON 2000
27 #define ECHANTILLON 50
28 #define ECARTMAX 0.002
29
30 int     graphdriver, graphmode, uu, vv ;
31 int     num [FAC + 1] [DIM + 1] ;
32 int     numa [DIM + 1], numb [DIM + 1] ;
33
34 double  xm, ym, dx, dy, a, b ;
35 double  XO [DIM + 1], x [DIM + 1], xbak [DIM + 1] ;
36 double  cO [DIM + 1], c [FAC + 1] [DIM + 1] ;
37
38 void init () {
39     graphdriver = DETECT ;
40     initgraph (&graphdriver, &graphmode, "C:\\\\TC") ;
41     uu = getmaxx (), vv = getmaxy () ;
42 }
43
44
```

```

45 void alea () {
46
47     int    u, w ;
48     double decalage ;
49
50 #ifdef INITIALISE
51     randomize () ;
52 #endif
53     decalage = 1.0 + (float) random (DIM - 1) ;
54
55     for (u = 1 ; u <= DIM ; u++) {
56
57         num [1] [u] = (int) fmod ((float) u + decalage, (float) DIM) ;
58
59         for (w = 2 ; w <= FAC ; w++) {
60
61             num [w] [u] = 1 + random (DIM) ;
62         }
63         if (random (100) < 20) numa [u] = -2 + random (5) ;
64         else numa [u] = 0 ;
65         if (random (100) < 20) numb [u] = -2 + random (5) ;
66         else numb [u] = 0 ;
67
68         X0 [u] = 0.0 ;
69         c0 [u] = (float) (random (DIM + 1) + 1.0) * COEFF ;
70
71         for (w = 1 ; w <= FAC ; w++) {
72
73             c [w] [u] = (float) (random (DIM + 1) + 1.0) * PULSE ;
74         }
75     }
76 }
77
78 void main () {
79
80     int    i, j, u, v, w, couleur, different, indic, cycle ;
81     float  x1, x2, y1, y2 ;
82     double xxx [ECHANTILLON + 2] [DIM + 1] ;
83
84     init () ;
85     alea () ;
86
87     for (a = A1 ; a < A2 ; a += DA)    {
88
89         for (b = B1 ; b < B2 ; b += DB) {
90
91             for (u = 1 ; u <= DIM ; u++) {
92
93                 xbak [u] = X0 [u] ;
94             }
95             cycle = 0 ;
96
97             for (i = 0 ; i < TAMPON + ECHANTILLON ; i++) {
98
99                 for (u = 1 ; u <= DIM ; u++) {
100
101                     x [u] = c0 [u] ;
102
103                     for (w = 1 ; w <= FAC ; w++) {
104
105                         x [u] *= cos (c [w] [u] * xbak [num [w] [u]]) ;
106                     }

```

```

107         x [u] += numa [u] * a + numb [u] * b ;
108     }
109     for (u = 1 ; u <= DIM ; u++) {
110         xbak [u] = x [u] ;
111     }
112     if (i > TAMPON) {
113         for (v = 1 ; v <= DIM ; v++) {
114             xxx [i - TAMPON] [v] = x [v] ;
115         }
116     }
117     for (i = 1 ; i < ECHANTILLON / 2 ; i++) {
118         different = 1 ;
119         for (j = 0 ; j <= i ; j++) {
120             indic = 1 ;
121             for (v = 1 ; v <= DIM ; v++) {
122                 if (fabs (xxx [j] [v] - xxx [j + i] [v]) > ECARTMAX)
123                     indic = 0 ;
124             }
125             if (indic == 1) {
126                 if (j == 1) different = 0 ;
127             }
128             else
129                 different = 1 ;
130         }
131         if (different == 0) {
132             cycle = i ;
133             break ;
134         }
135     }
136     x1 = uu * (a - A1) / (A2 - A1) ;
137     y1 = vv - vv * (b - B1) / (B2 - B1) ;
138     x2 = x1 + uu * DA / (A2 - A1) ;
139     y2 = y1 - vv * DB / (B2 - B1) ;
140
141     if (cycle == 0) couleur = BLACK ;
142     else
143         couleur = cycle ;
144     if (fmod (couleur, 16) == 0 && couleur != 0) couleur = YELLOW ;
145     setcolor (couleur) ;
146     rectangle (x1, y1, x2, y2) ;
147     setfillstyle (SOLID_FILL, couleur) ;
148     floodfill (x1 + (x2 - x1) / 2, y1 + (y2 - y1) / 2, couleur) ;
149 }
150 }
151 getch () ;
152 closegraph () ;
153 clrscr () ;
154 }
155 /* EOF */

```

## 6.4 Tangence de deux paraboles : forme du poulpe résultant

```

1 x := (t, a, b) -> t^2 + a :
2 y := (t, a, b) -> t + b :
3 soluce := solve ({y (t, A, B) = -x (t, A, B)^2,
4               diff (y (t, A, B), t) / (2 * t) = -2 * x (t, A, B)}, {A, B}) :
5 assign (soluce) : A, B ;

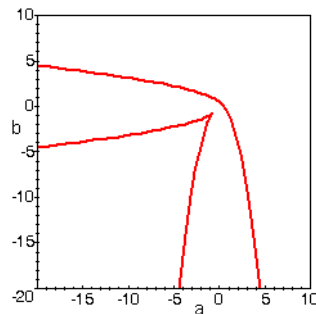
```

$$-\frac{1+4t^3}{4t}, \quad -\frac{16t^3+1}{16t^2}$$

```

6 plot ([A, B, t = -50..50], x = -20..10, y = -20..10, labels = [a, b]) ;

```



Pour deux courbes identiques d'axes orthogonaux, la parabole fixe et la symétrique de la parabole mobile en position de tangence de pente 1, servent d'asymptotes à la courbe engendrée, comme on peut facilement s'en convaincre en imaginant par exemple le mouvement de la parabole d'axe horizontal, par rapport à la parabole verticale fixe.

## conclusion sémantique

Le chaos mérite-t-il son nom ? En français, le terme renvoie aux notions intuitives de confusion et de désordre. Si la seconde reçoit une signification en physique, aucune des deux n'est vraiment recevable en mathématiques. Notons pour commencer que le chaos est déterministe : aucun tirage au sort n'intervient pour fixer l'évolution des suites étudiées. Dans quelle mesure les résultats sont-ils désordonnés ? Si l'on examine le comportement d'une suite particulière, il faut d'abord remarquer que l'absence de périodicité ne signifie pas chaos. Ce dernier doit être signé par une sensibilité exponentielle aux conditions initiales et par la fractalité de la surface où s'inscrit la trajectoire. Par exemple, les trajectoires qui produisent les sections en  $n$ -polygones ouverts se plongent dans un tore et ne sont pas chaotiques. Le terme de désordre ne paraît adapté que pour les chaos développés, lorsque les points de la section semblent aléatoires ; mais ceci n'est qu'une appréciation subjective. Quant à parler de la répartition des différents régimes sur les portraits de MANDELBROT (et de JULIA), il semble que le terme de complexité logique soit beaucoup plus pertinent que celui de désordre. Il y a finalement chaos et chaos ; il serait maladroit d'appliquer le même concept indifféremment à une suite seulement apériodique, à une suite vraiment chaotique et à un portrait de MANDELBROT pris dans son ensemble.

